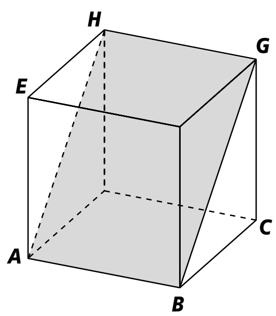
Hoofdstuk 1 - Vectoren

Bladzijde 12

1a Driehoek EHA is een rechthoekige driehoek.
b Hoekpunt D
c De punten B , F en G behoren ook tot vlak EHA.
d Een rechthoek.
e De hoekpunten A, B, F en E behoren tot het vlak $DCGH$.
f Hoekpunt E.
g De punten E, R en F liggen op één rechte lijn.
h Nee, het punt H ligt niet in driehoek ABG.
Ja, omdat de lijnen AB en GH evenwijdig zijn, is er een vlak mogelijk door deze lijnen. Bovendien ligt het punt H in het vlak $ABGH$ dat wordt bepaald door de punten A , B en G.

2 Een vlak wordt vastgelegd door drie verschillende punten die niet op één lijn liggen. Als de drie punten op één lijn liggen kan het vlak nog draaien om de lijn die door die drie punten gaat, dus het vlak is niet altijd volledig bepaald.

3a Om de verbindingslijn tussen de punten B en C draaien de vlakken $BCGF$, $BCHE$ en $BCDA$.
b Ja, de lijnen AB en GH zijn evenwijdig, dus er is een vlak mogelijk waar deze lijnen in liggen, namelijk vlak $ABGH$.



c De punten A, C en E liggen niet op één lijn, dus er is één vlak mogelijk namelijk vlak $ACGE$.
d De lijnen AH en GH zijn twee snijdende lijnen, dus er is een vlak vastgelegd namelijk vlak $ABGH$.
Hoekpunt B behoort ook tot dit vlak.
e De punten B, D en F liggen niet op één lijn, dus er is een vlak vastgelegd namelijk vlak $BDFH$.
Hoekpunt H behoort ook tot dit vlak.
f Een vlak is vastgelegd door twee snijdende lijnen AG en EC.
De lijnen AC en EG zijn evenwijdig, dus er is één vlak mogelijk waar deze beide lijnen in liggen namelijk vlak $ACGE$.
g Omdat de lijnen AB en CH geen evenwijdige of snijdende lijnen zijn, is er geen vlak mogelijk waar deze lijnen allebei in liggen.

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 13

4a Bijvoorbeeld de punten E, F en G zijn punten die niet op één lijn liggen en bepalen daarmee het boven vlak EFG.
Of bijvoorbeeld de punten B, C en H zijn punten die niet op één lijn liggen en bepalen daarmee vlak BCH.

b Bijvoorbeeld punt H ligt niet op de lijn EF, dus punt H en de lijn EF bepalen daarmee het bovenvlak EFG.
Of bijvoorbeeld punt B ligt niet op de lijn EG, dus punt B en de lijn EG bepalen daarmee vlak BEG.

c Bijvoorbeeld de lijnen AC en BD snijden elkaar en bepalen het grondvlak $ABCD$.
Of bijvoorbeeld de lijnen AC en CG snijden elkaar in punt C en bepalen daarmee vlak ACG.
De lijnen kunnen elkaar ook buiten de figuur snijden; zo zijn EF en HI snijdende lijnen en leggen het bovenvlak van het vijfzijdig prisma vast.

d Bijvoorbeeld de lijnen AE en BF zijn evenwijdige lijnen en bepalen daarmee zijvlak $ABFE$.
Of bijvoorbeeld de lijnen AC en EG zijn evenwijdige lijnen en bepalen daarmee vlak $ACGE$.

5a Ja, omdat de lijnen AC en EJ evenwijdig zijn, bestaat er een vlak door de punten A, C, E en J.

b Nee, omdat de lijnen BI en EJ niet evenwijdig zijn en elkaar niet snijden, is er geen vlak mogelijk door deze lijnen.
Het punt B ligt niet in het vlak door de punten E, J en I.

c Nee, omdat de lijnen BF en CL niet evenwijdig zijn en elkaar niet snijden, is er geen vlak mogelijk door deze lijnen.
Het punt L ligt dus niet in vlak BCF.

d Ja, omdat de lijnen BL en CE elkaar snijden, is er een vlak mogelijk door deze lijnen.
Bovendien zijn de lijnen BC en EL evenwijdig, dus bestaat er een vlak door de punten B, C, E en L.

e De lijnen in vlak $BCJG$ die evenwijdig zijn aan lijn FK moeten liggen in de vlakken die worden verkregen door te draaien om de verbindingslijn tussen de punten F en K.
BC en GJ liggen in vlak $BCJG$ en zijn evenwijdig aan lijn FK.
Andere lijnen evenwijdig aan lijn BC in vlak $BCJG$ voldoen natuurlijk ook.

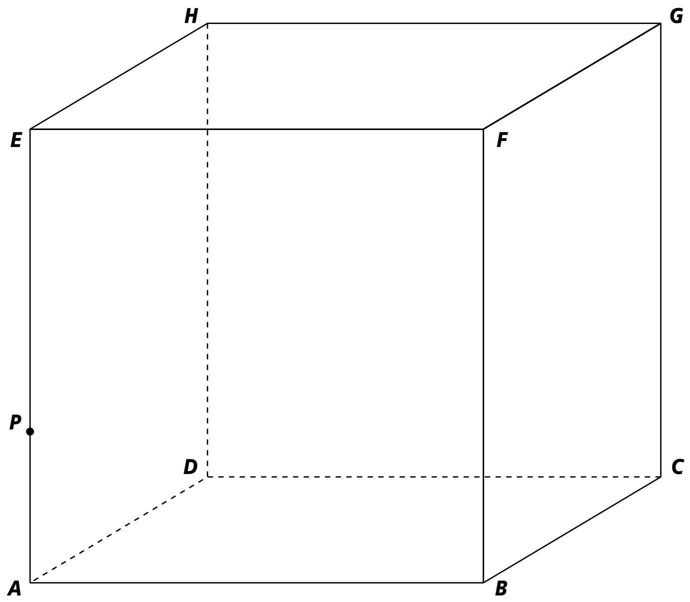
Bladzijde 14

6a Omdat de lijnen RS, PQ, MN en KL in verschillende horizontale vlakken liggen kunnen ze elkaar niet snijden en kunnen twee lijnen alleen maar evenwijdig zijn wanneer ze in hetzelfde (natuurlijk niet horizontale) vlak liggen.
De lijnen MN en KL zijn evenwijdig aan elkaar.

b Tweetallen lijnen die niet in één vlak liggen zijn niet evenwijdig en snijden elkaar ook niet.
Alle mogelijkheden zijn RS en PQ; RS en MN; RS en KL; PQ en MN en PQ en KL.

© Noordhoff Uitgevers bv

7a



Lijn CP ligt in de vlakken $ACGE$, BCP, DCP, FCP en HCP.
Alle lijnen in deze vlakken die niet evenwijdig zijn aan lijn CP snijden deze lijn.
Mogelijkheden zijn bijvoorbeeld AC, AE, EG, GA, CG, EC, BC, BP, DC, DP, FP, FC, HP en HC.

b Omdat bijvoorbeeld punt H niet ligt in het vlak $ACGE$ waar de lijn CP in ligt, hebben de lijnen HE, HG en HA geen snijpunt gemeen met de lijn CP en zijn ook niet evenwijdig aan deze lijn.
Omdat bijvoorbeeld punt F niet ligt in het vlak BCP waar de lijn CP in ligt, heeft de lijn BF geen snijpunt gemeen met de lijn CP en is ook niet evenwijdig aan deze lijn.

c De lijnstukken AE en CG zijn opstaande ribben van de kubus, dus zijn de lijnen AE en CG evenwijdig.
Er is dus een vlak mogelijk door AE en CG, namelijk vlak $ACGE$.
Omdat de lijnen AG en CP allebei in vlak $ACGE$ liggen en niet evenwijdig zijn, moeten ze elkaar wel snijden.

d Het punt P ligt niet in het vlak $BCHE$ dat wordt bepaald door de punten B, C en H. De punten P, B, C en H liggen niet in één vlak, dus er is geen vlak mogelijk door de lijnen CP en HB. Deze lijnen kunnen dus niet evenwijdig zijn of een snijpunt hebben.

8a De lijnen BC en ED liggen allebei in het grondvlak $ABCDE$ en zijn niet evenwijdig, dus moeten deze lijnen elkaar snijden.

b Het punt T ligt niet in het vlak $ABCDE$ dat wordt bepaald door de punten B, C en D. De punten T, B, C en D liggen niet in één vlak, dus er is geen vlak mogelijk door de lijnen TB en CD. Deze lijnen kunnen dus niet evenwijdig zijn of een snijpunt hebben.

c Het punt T ligt niet in het vlak $ABCDE$ dat wordt bepaald door de punten B, D en E. De punten T, B, D en E liggen niet in één vlak, dus er is geen vlak mogelijk door de lijnen TB en DE. Deze lijnen kunnen dus niet evenwijdig zijn of een snijpunt hebben.
In werkelijkheid hebben TB en DE geen snijpunt.

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 15

9a Het punt N ligt niet in het vlak BCT dat wordt bepaald door de punten B, C en T.
De punten N, B, C en T liggen niet in één vlak, dus er is geen vlak mogelijk door de lijnen BC en TN. De lijnen BC en TN kunnen dus niet evenwijdig zijn of elkaar snijden, maar moeten elkaar kruisen.

b Omdat de lijnen BN en AC allebei in het grondvlak $ABCD$ liggen en niet evenwijdig zijn, moeten ze elkaar wel snijden.

c Omdat de lijnen BT en CM allebei in het zijvlak BCT liggen en niet evenwijdig zijn, moeten ze elkaar wel snijden.

d Omdat het punt N dichter bij B ligt dan bij D ligt het punt niet op lijn AC.
Het punt N ligt niet in het vlak ACT.
De punten N, A, C en T liggen niet in één vlak, dus er is geen vlak mogelijk door de lijnen AT en CN.
De lijnen AT en CN kunnen dus niet evenwijdig zijn of elkaar snijden, maar moeten elkaar kruisen.

e Omdat de lijnen CN en AD allebei in het grondvlak $ABCD$ liggen en niet evenwijdig zijn, moeten ze elkaar wel snijden.

f Het punt M ligt niet in het vlak BDT.
De punten M, B, D en T liggen niet in één vlak, dus er is geen vlak mogelijk door de lijnen BM en DT. De lijnen BM en DT kunnen dus niet evenwijdig zijn of elkaar snijden, maar moeten elkaar kruisen.

10a Het punt P ligt niet in het vlak $ADHE$ dat wordt bepaald door de punten A, D en H.
De punten P, A, D en H liggen niet in één vlak, dus er is geen vlak mogelijk door de lijnen AP en DH.
De lijnen AP en DH kunnen dus niet evenwijdig zijn of elkaar snijden, maar moeten elkaar kruisen.

b Het punt P ligt niet in het vlak $DBFH$. De punten P, D, B en F liggen niet in één vlak, dus er is geen vlak mogelijk door de lijnen PF en DB.
De lijnen PF en DB kunnen dus niet evenwijdig zijn of elkaar snijden, maar moeten elkaar kruisen.

c De lijnen QP en DC snijden elkaar in punt S.
$\angle DSQ = \angle HPQ$ (zijn F-hoeken)
$BD = \sqrt{32}$
$BQ = \sqrt{(\sqrt{32})^2 + 6^2} = \sqrt{68} \approx 8,2$
$SC = \dfrac{5 \cdot 3}{6} = 2\frac{1}{2}$
Dus driehoek SCR is gelijkvormig met driehoek RSP.
$PR = 2 \cdot HQ$, dus $PR = 2 \cdot 2 = 4$
$DS = DR + RS \Rightarrow DS = 2 + 4 = 6$

d $\triangle ADR$ is een rechthoekige driehoek. De rechthoekszijden $AD = 6$ en $DR = 2$
$AR = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40}$

e $\triangle ARP$ is een rechthoekige driehoek. De rechthoekszijden $AR = \sqrt{40}$ en $PR = 4$
$AP = \sqrt{(\sqrt{40})^2 + 4^2} = \sqrt{56}$

© Noordhoff Uitgevers bv

11a De lijnen AD en EH zijn ribben en liggen in het zijvlak $ADHE$. Lijnstukken AD en EH zijn evenwijdig.
Punt P ligt op de verlengde van lijnstuk AD en punt Q op de verlengde van DH.
Omdat de lijnstukken PQ en EH allebei in het zijvlak liggen en niet evenwijdig zijn, moeten ze elkaar wel snijden.

b Het punt R ligt niet in het vlak PHG.
De punten P, H, G en R liggen niet in één vlak, dus er is geen vlak mogelijk door de lijnen HG en PR.
De lijnen HG en PR kunnen dus niet evenwijdig zijn of elkaar snijden, maar moeten elkaar kruisen.

c Omdat de lijnen PC en EG niet evenwijdig zijn en elkaar niet snijden, is er geen vlak mogelijk door deze lijnen.
Het punt G ligt dus niet in vlak PCE.

d $\triangle DAB$ is een rechthoekige driehoek. De rechthoekszijden zijn $AD = 4$ en $AB = 4$
$BD = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32}$
$\triangle BDQ$ is een rechthoekige driehoek. De rechthoekszijden $DQ = 6$ en $BD = \sqrt{32}$
$BQ = \sqrt{(\sqrt{32})^2 + 6^2} = \sqrt{68} \approx 8,2$

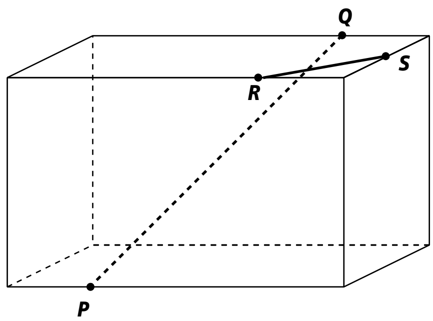
e Punt Q ligt op de verlengde van ribbe DH, dus ligt Q in het zijvlak $ADHE$.
Punt M ligt in het midden van hetzelfde zijvlak op ribbe DH.
De lijnen AM en EQ zijn evenwijdig in het zijvlak, dus bestaat er een vlak door de punten A, M, Q en E.

f Omdat de lijnen PQ en SR evenwijdig zijn, geldt dat de driehoeken PDQ en SCR van de zijvlakken gelijkvormig zijn.

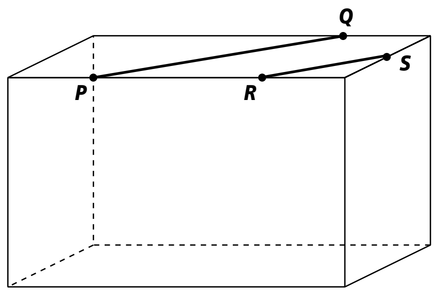
$\triangle PDQ$	$PD = 5$	$DQ = 6$	PQ
$\triangle SCR$	$SC = ?$	$CR = 3$	SR

$SC = \dfrac{5 \cdot 3}{6} = 2\tfrac{1}{2}$

12a



kruisend



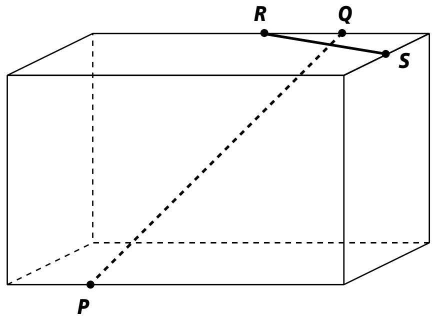
evenwijdig

De lijnen PQ en RS kunnen in situatie 1 elkaar kruisen wanneer bijvoorbeeld Q, R en S in het bovenvlak liggen en P in het ondervlak of de lijnen PQ en RS zijn evenwijdig wanneer bijvoorbeeld alle punten in het bovenvlak liggen.

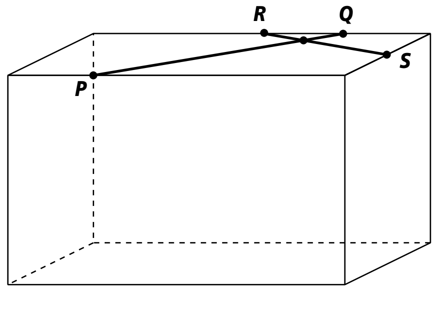
b De lijnen PQ en RS kunnen in situatie 2 elkaar kruisen wanneer bijvoorbeeld Q, R en S in het bovenvlak liggen en P in het ondervlak of de lijnen PQ en RS kunnen elkaar snijden wanneer bijvoorbeeld alle punten in het bovenvlak liggen.

De lijnen PQ en RS kunnen in situatie 3 elkaar snijden wanneer bijvoorbeeld P en S in het voorvlak liggen en Q en R in het achtervlak of de lijnen PQ en RS zijn evenwijdig wanneer bijvoorbeeld P en Q in het voorvlak liggen en R en S in het achtervlak.

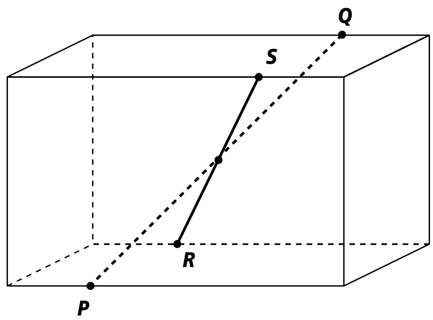
© Noordhoff Uitgevers bv



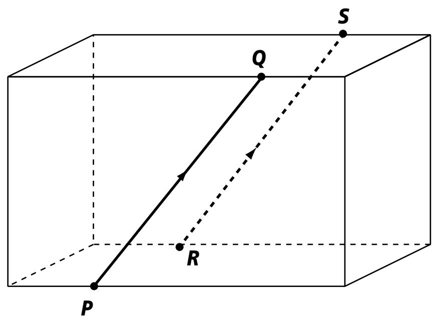
kruisend



snijdend



snijden



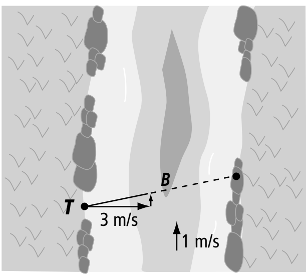
evenwijdig

Bladzijde 16

13a De snelheid van het vliegtuig t.o.v. de grond is 300 – 60 = 240 km/u

b De snelheid van het vliegtuig t.o.v. de grond is 300 + 60 = 360 km/u

14ab



Na één seconde is de boot in punt B.
In punt X zal Tim de overkant bereiken.

c De gemiddelde snelheid is de afgelegde weg in werkelijkheid gedeeld door de tijd die hij over de oversteek doet. $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ is de somvector van de snelheden.

d Per seconde drijft de boot één meter naar het noorden.
Per seconde vaart Tim drie meter naar het oosten.
Tim legt in werkelijkheid $OQ = \sqrt{(-10\sqrt{2}+10)^2 + (10\sqrt{2})^2} \approx 14{,}7$ km af in één seconde.

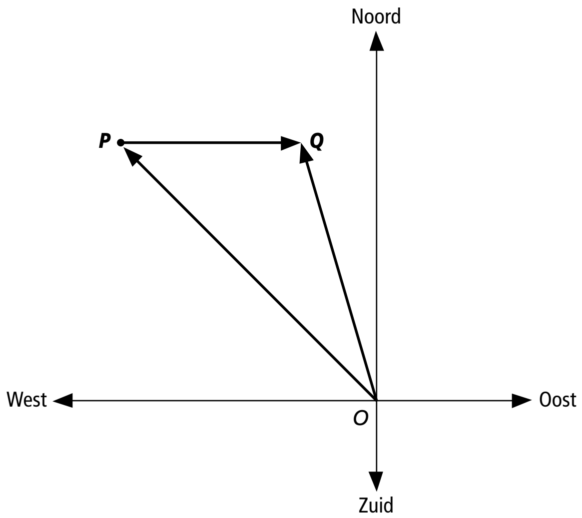
© Noordhoff Uitgevers bv

15 $\tan\angle T = \dfrac{AB}{TA} \Rightarrow \tan\angle T = \dfrac{1}{3}$

$\angle T = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \angle T \approx 18°$

Bladzijde 17

16a,b



c De koershoek in noordwestelijk richting is $45°$.

$\sin 45° = \dfrac{PK}{20}$

$PK = 20\sin 45° = 10\sqrt{2}$

De coördinaten van $P(-10\sqrt{2}, 10\sqrt{2})$.

Q ligt 10 oostelijker dus $Q(-10\sqrt{2}+10, 10\sqrt{2})$

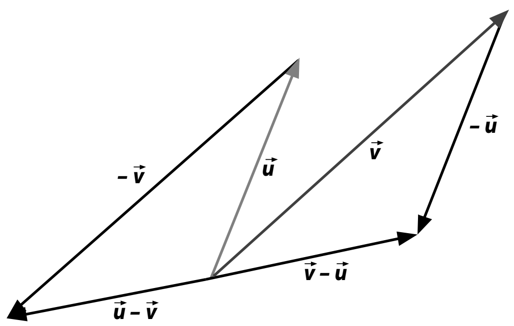
$\tan\alpha = \dfrac{10\sqrt{2}-10}{10\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha \approx 16°$

De koershoek wordt altijd met de wijzers van de klok meegenomen.

De koershoek is dus $360° - 16° = 344°$

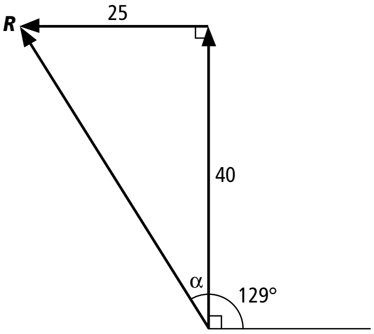
d $OQ = \sqrt{(-10\sqrt{2}+10)^2 + (10\sqrt{2})^2} \approx 14{,}7\text{ km}$

17



© Noordhoff Uitgevers bv

18a

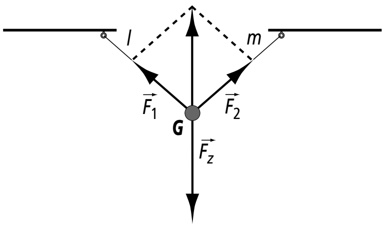


De zwemmer moet zich bij de start richten op punt R.

b Er geldt $\tan\alpha = \dfrac{25}{40} \Rightarrow \alpha \approx 39°$

De hoek tussen de zwemrichting en de stroomrichting is dan $90° + 39° = 129°$.

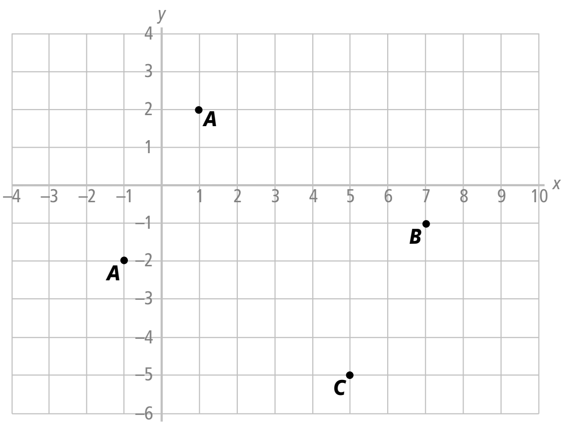
19a



b De somvector is het tegengestelde van $\vec{F_z}$ en zorgt er voor dat G niet meer beweegt.
Dus $\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_z} = \vec{0}$.

Bladzijde 18

20a



b $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, want beide vectoren hebben dezelfde richting, namelijk zes naar rechts en drie omlaag, en dezelfde grootte.

c Nee, want beide vectoren hebben een verschillende richting, ze zijn wel even lang.

d De vector $\overrightarrow{AC}$ kun je schrijven als $\begin{pmatrix} 5-1 \\ -5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Vanuit punt A moet je vier naar rechts en zeven omlaag om bij punt C te komen.
Omdat $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AC}$ geldt dus dat $P(7 + 4 , -1 - 7) = (11, -8)$.

e De vector $2 \cdot \overrightarrow{DC}$ kun je beschrijven als $2 \cdot \begin{pmatrix} 5--1 \\ -5--2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Omdat $\overrightarrow{BQ} = 2 \cdot \overrightarrow{DC}$ geldt dus dat $Q(7 +12, -1 -6) = (19, -7)$.

f $\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$, dus de coördinaten van punt R zijn $(8, 1)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

21a $\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

$\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$

$3\vec{a}-2\vec{b}=3\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\-3\end{pmatrix}$

b $|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

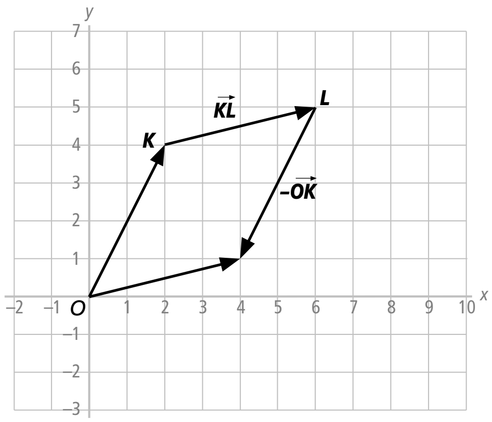
$|\vec{b}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$

$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$

$|3\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{(-7)^2+(-3)^2}=\sqrt{58}$

22a



$\overrightarrow{KL}=\begin{pmatrix}6-2\\5-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

b $\overrightarrow{OL}-\overrightarrow{OK}=\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

c $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}-14\\-18\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}12\\-20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-26\\2\end{pmatrix}$

d $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-14-12\\-18--20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-26\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}-14\\-18\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}12\\-20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-26\\2\end{pmatrix}$

e $\overrightarrow{BA}=\begin{pmatrix}12--14\\-20--18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}26\\-2\end{pmatrix}$

Bladzijde 19

23a $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}3\\31\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}4\\35\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\31\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}0\\34\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\35\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$

© Noordhoff Uitgevers bv

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 34 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$

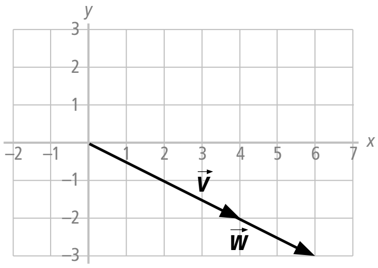
$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$

$\left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$

$\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$

c Vierhoek $ABCD$ is een ruit.

24a



b $\vec{w} = 1\tfrac{1}{2} \cdot \vec{v} \Rightarrow \vec{w} = 1\tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

c $\vec{r} = 2 \cdot \vec{v} \Rightarrow \vec{r} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\vec{s} = 3 \cdot \vec{v} \Rightarrow \vec{s} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}$

$\vec{t} = 4 \cdot \vec{v} \Rightarrow \vec{t} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -8 \end{pmatrix}$

d De vector $-\vec{v}$ is even lang en heeft een tegengestelde richting aan de vector $\vec{v}$.

$\vec{p} = 2 \cdot -\vec{v} \Rightarrow \vec{p} = 2 \cdot -\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\vec{q} = 3 \cdot -\vec{v} \Rightarrow \vec{q} = 3 \cdot -\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\vec{r} = 4 \cdot -\vec{v} \Rightarrow \vec{r} = 4 \cdot -\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 8 \end{pmatrix}$

e Als twee vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ loodrecht op elkaar staan dan geldt

$4a_1 + -2a_2 = 0$ dus is $2a_2 = 4a_1 \Rightarrow a_2 = 2a_1$

Stel $a_1 = 1 \Rightarrow a_2 = 2$; $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$a_1 = 2 \Rightarrow a_2 = 4$; $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$a_1 = 3 \Rightarrow a_2 = 6$; $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

De vectoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ staan loodrecht op $\vec{v}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

25a $\overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} -p \\ -q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p-a \\ -q-b \end{pmatrix}$

Voor de lengte van de vector $\overrightarrow{AQ}$ geldt: $|\overrightarrow{AQ}| = \sqrt{(-p-a)^2 + (-q-b)^2}$

$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-a \\ q-b \end{pmatrix}$

Voor de lengte van de vector $\overrightarrow{AP}$ geldt: $|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(p-a)^2 + (q-b)^2}$

$|\overrightarrow{AQ}| = |\overrightarrow{AP}|$

$\sqrt{(-p-a)^2 + (-q-b)^2} = \sqrt{(p-a)^2 + (q-b)^2}$

$(-p-a)^2 + (-q-b)^2 = (p-a)^2 + (q-b)^2$

b $(-p-a)^2 + (-q-b)^2 = (p-a)^2 + (q-b)^2$

$\cancel{p^2} + 2ap + \cancel{a^2} + \cancel{q^2} + 2bq + \cancel{b^2} = \cancel{p^2} - 2ap + \cancel{a^2} + \cancel{q^2} - 2bq + \cancel{b^2}$

$2ap + 2bq = -2ap - 2bq$

$4ap + 4bq = 0 \Rightarrow ap + bq = 0$

26a $\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 6 \\ 17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{QS} = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$

b De vectoren $\overrightarrow{PR}$ en $\overrightarrow{QS}$ staan loodrecht op elkaar, want $10 \cdot -6 + 15 \cdot 4 = -60 + 60 = 0$.

c $|\overrightarrow{PQ}| = \left|\begin{pmatrix} 5--4 \\ 9-2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9^2 + 7^2} = \sqrt{130}$

$|\overrightarrow{QR}| = \left|\begin{pmatrix} 6-5 \\ 17-9 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2 + 8^2} = \sqrt{65}$

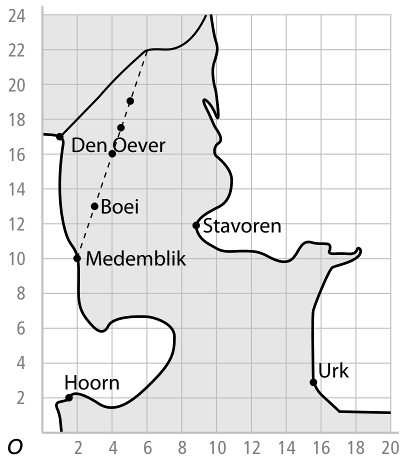
$|\overrightarrow{SR}| = \left|\begin{pmatrix} 6--1 \\ 17-13 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65}$

$|\overrightarrow{PS}| = \left|\begin{pmatrix} -1--14 \\ 13-2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2 + 11^2} = \sqrt{130}$

Vierhoek $PQRS$ heeft de vorm van een vlieger.

Bladzijde 20

27a



© Noordhoff Uitgevers bv

b Het jacht kan volgens rechte lijnen varen, dus wordt de Afsluitdijk in het punt $(6, 22)$ om 16.00 uur bereikt.

c Zie de figuur bij a.

d Om ca. 14.30 uur was de afstand van het jacht tot Den Oever het kleinst.

e Het jacht bereikt het punt $(77, 225)$ niet, want $225 - 10 = 215$ en dit is geen veelvoud van drie.

28a Van Medemblik naar de boei verplaatst de boot zich van punt $(2, 10)$ naar $(3\ , 13)$, dus de snelheidsvector is $\begin{pmatrix} 3 \\ 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b De coördinaten na twee uur: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 \\ 10+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \end{pmatrix}$, dus $(4, 16)$ klopt

De coördinaten na drie uur: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 \\ 10+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 19 \end{pmatrix}$, dus $(5, 19)$ klopt

c t is in uren uitgedrukt, dus 2 uur en 45 minuten is 2,75 uur.

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix} + 2,75 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,75 \\ 18,25 \end{pmatrix}$

De positie van het schip na 2 uur en 45 minuten is (4,74; 18,25).

Bladzijde 21

29a Voor $\mu = 1$ geldt: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, dus $(4, 6)$ hoort bij $\mu = 1$.

Voor $\mu = 5$ geldt: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 22 \end{pmatrix}$, dus $(16, 22)$ hoort bij $\mu = 5$.

Voor $\mu = -2$ geldt: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix}$, dus $(-5, -6)$ hoort bij $\mu = -2$.

Voor $\mu = 1\frac{1}{2}$ geldt: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\frac{1}{2} \\ 8 \end{pmatrix}$, dus $(5\frac{1}{2}, 8)$ hoort bij $\mu = 1\frac{1}{2}$.

b Invullen van het punt $(10, 14)$ in de vectorvoorstelling van de lijn geeft:

$\begin{pmatrix} 10 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow 3\mu + 1 = 10$ of $4\mu + 2 = 14$. Dus $\mu = 3$.

c Invullen van het punt $(100, 136)$ in de vectorvoorstelling van de lijn geeft:

$\begin{pmatrix} 100 \\ 136 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow 3\mu + 1 = 100$ of $4\mu + 2 = 136$ dus $\mu = 33$ of $\mu = 33\frac{1}{2}$

Het punt ligt niet op de lijn.

d Invullen van het punt $(31, b)$ in de vectorvoorstelling van de lijn geeft:

$\begin{pmatrix} 31 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow 3\mu + 1 = 31$ of $b = 2 + 4\mu$

$b = 2 + 4\mu$ en $\mu = 10$ geeft: $b = 40 + 2 = 42$

30a $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}$ of $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$

b $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

c $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ of $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

© Noordhoff Uitgevers bv

31a De richtingsvector $\begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix}$ is deelbaar door drie, dus de vectorvoorstelling van

de lijn wordt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

b $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ of $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 20 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \end{pmatrix}$

32a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$

b $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

c $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 4 \\ -14 \end{pmatrix}$

d $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

33 Een vectorvoorstelling van de lijn door de punten $A(-3, 5)$ en $B(7, 13)$ is:

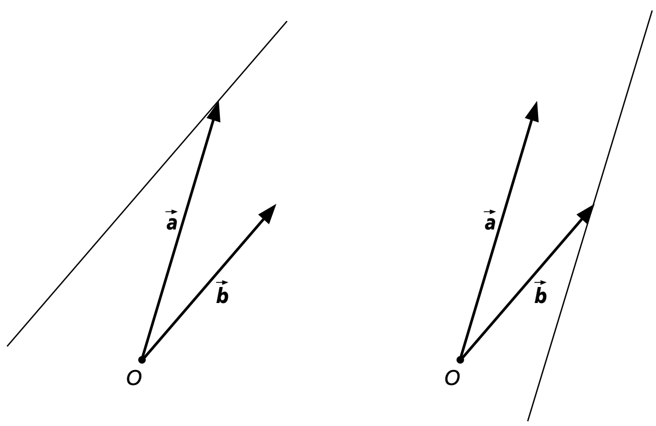
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$ en punt $C(42, 41)$ ligt op de lijn door de punten A en B.

Substitueer punt C in de vectorvoorstelling geeft:

$\begin{pmatrix} 42 \\ 41 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow -3 + 10\lambda = 42$ of $5 + 8\lambda = 41$

$\lambda = 4\frac{1}{2}$, dus punt C ligt op de lijn AB.

34a,b



Bladzijde 22

35a Vanuit de oorsprong O kom je in A door vijf langs de x-as te nemen,
dus $A(5, 0, 0)$.
Vanuit de oorsprong O kom je in E door vijf langs de x-as te nemen en drie omhoog evenwijdig aan de z-as, dus $E(5, 0, 3)$.
Vanuit de oorsprong O kom je in C door zes langs de y-as te nemen,
dus $C(0, 6, 0)$.

 © Noordhoff Uitgevers bv

b Voor het midden van lijnstuk BF geldt: $\vec{m} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}5+5\\6+6\\0+3\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}10\\12\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\6\\1\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

De coördinaten van het midden van BF zijn $(5, 6, 1\frac{1}{2})$.

c $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DG} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}$ dus $P(0, 4, 3)$.

36a Omdat het punt R loodrecht onder punt P ligt, verandert alleen de z-coördinaat van punt P.

R ligt op de ribbe OC, dus de coördinaten van R zijn $(0, 4, 0)$.

Omdat het punt S recht tegenover punt R ligt, verandert alleen de x-coördinaat van punt R.

Punt S ligt op de ribbe AB, dus $S(5, 4, 0)$.

b De punten P en E hebben coördinaten $(0, 4, 3)$ en $(5, 0, 3)$.

$$\overrightarrow{PE} = \begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-4\\0\end{pmatrix}$$

c $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-1\\-3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\3\\0\end{pmatrix}$ dus $Q(5, 3, 0)$.

37a De punten F en M hebben de coördinaten $(4, 6, 3)$ en $(2, 0, 5)$.

De kentallen van de vector $\overrightarrow{FM}$ zijn $\overrightarrow{FM} = \begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\6\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-6\\2\end{pmatrix}$

b Van $\triangle MNF$ weet je $MN = \Delta z = 2$

Van $\triangle PQB$ weet je $PQ = \Delta z = 2$

Van $\triangle QAB$ weet je $AQ = \Delta x = 2$ en $AB = \Delta y = 6$

c Voor $\triangle QAB$ geldt: $\Delta x = 2$, $\Delta y = 6$ en $\Delta z = 0$.

$$QB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} = \sqrt{2^2 + 6^2 + 0^2} = \sqrt{40} \approx 6,32$$

Voor $\triangle PQB$ geldt: $\Delta x = -2$, $\Delta y = -6$ en $\Delta z = 2$

$$BP = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 + 2^2} = \sqrt{44} \approx 6,63$$

$NF = QB \approx 6,32$

$FM = BP \approx 6,63$

d De afstand tussen de punten $F(4, 6, 3)$ en $M(2, 0, 5)$ is dan gelijk aan

$$\left|\overrightarrow{FM}\right| = \left|\begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\6\\3\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-2\\-6\\2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 + 2^2} = \sqrt{44} \approx 6,63$$

Bladzijde 23

38a De afstand tussen de punten $O(0, 0, 0)$ en $S(5, 4, 0)$ is dan gelijk aan

$$\left|\overrightarrow{OS}\right| = \left|\begin{pmatrix}5-0\\4-0\\0-0\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}5\\4\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{5^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{41}$$

© Noordhoff Uitgevers bv

De afstand tussen de punten $O(0,0,0)$ en $P(0,4,3)$ is dan gelijk aan

$$\left|\overrightarrow{OP}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0-0 \\ 4-0 \\ 3-0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2+4^2+3^2} = 5$$

De afstand tussen de punten $O(0,0,0)$ en $F(5,6,3)$ is dan gelijk aan

$$\left|\overrightarrow{OF}\right| = \left|\begin{pmatrix} 5-0 \\ 6-0 \\ 3-0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{5^2+6^2+3^2} = \sqrt{70}$$

De afstand tussen de punten $D(0,0,3)$ en $B(5,6,0)$ is dan gelijk aan

$$\left|\overrightarrow{DB}\right| = \left|\begin{pmatrix} 5-0 \\ 6-0 \\ 0-3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{5^2+6^2+(-3)^2} = \sqrt{70}$$

b De afstand tussen de punten $A(5,0,0)$ en $P(0,4,3)$ is dan gelijk aan

$$\left|\overrightarrow{AP}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0-5 \\ 4-0 \\ 3-0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-5)^2+4^2+3^2} = \sqrt{50}$$

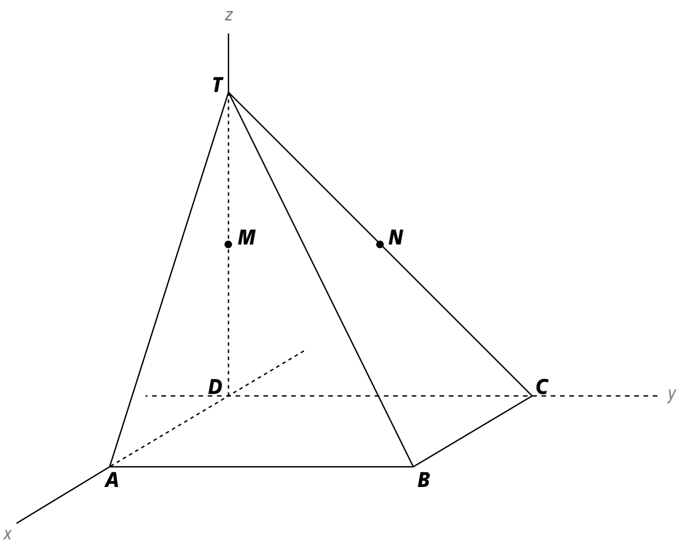
De afstand tussen de punten $S(5,4,0)$ en $P(0,4,3)$ is dan gelijk aan

$$\left|\overrightarrow{SP}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0-5 \\ 4-4 \\ 3-0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-5)^2+0^2+3^2} = \sqrt{34}$$

De afstand tussen de punten $F(5,6,3)$ en $R(0,4,0)$ is dan gelijk aan

$$\left|\overrightarrow{FR}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0-5 \\ 4-6 \\ 0-3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-5)^2+\left(-2\right)^2+(-3)^2} = \sqrt{38}$$

39a



b De coördinaten van $C(-4,0,0)$ en $D(0,-4,0)$

M ligt in het midden van $D(0,4,0)$ en $T(0,0,4)$, dus

$$\overrightarrow{OM} = \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OT}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

De coördinaten van $M(0, -2, 2)$

© Noordhoff Uitgevers bv

N ligt in het midden van C en T, dus

$$\overrightarrow{ON} = \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OT}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dus is $N\,(-2, 0, 2)$.

c De afstand tussen de punten $A(4, 0, 0)$ en $B(0, 4, 0)$ is dan gelijk aan

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{32} \approx 5,7$$

Ribben BC, CD en AD hebben dezelfde lengte als AB want $ABCD$ is een vierkant.
De afstand tussen de punten A en T is dan gelijk aan
Ribben BT, CT en DT hebben dezelfde lengte als AT, want piramide $T.ABCD$ is een regelmatige piramide.

d De afstand tussen de punten $A(4, 0, 0)$ en $M(0, -2, 2\ )$ is dan gelijk aan

$$\left|\overrightarrow{AM}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{24} \approx 4,9$$

De afstand tussen de punten A en N is dan gelijk aan

$$\left|\overrightarrow{AN}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-6)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{40} \approx 6,3$$

De afstand tussen de punten M en N is dan gelijk aan

$$\left|\overrightarrow{MN}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8} \approx 2,8$$

40a Het punt P ligt niet in het vlak $OEFC$.
De punten O, F, E en P liggen niet in één vlak, dus er is geen vlak mogelijk door de lijnen OF en EP.
Deze lijnen kunnen dus niet evenwijdig zijn of elkaar snijden en moeten elkaar kruisen.

b De coördinaten van de hoekpunten en van punt P zijn:
$O(0, 0, 0)$; $A(6, 0, 0)$; $B(6, 6, 0)$; $C(0, 6, 0)$; $E(6, 0, 6)$; $F(6, 6, 6)$;
$G(0, 6, 6)$; $D(0, 0, 6)$ en $P(0, 6, 3)$.

c De steunvector is $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en de richtingsvector van $\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

De richtingsvector is deelbaar door zes, dus de vectorvoorstelling van een lijn door de punten O en F wordt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

d De steunvector is $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ en de richtingsvector van $\overrightarrow{EP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$.

De richtingsvector is deelbaar door drie, dus de vectorvoorstelling van een lijn door de punten E en P wordt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

e Richtingsvector $\overrightarrow{EP} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ en steunvector is $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Een lijn door het punt C evenwijdig aan de lijn EP heeft richtingsvector $\overrightarrow{EP}$.

Dus wordt de vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

f De lijn EP snijden met het vlak ABC (met vergelijking z = 0):

Invullen van $(x, y, 0)$ in de vectorvoorstelling geeft: $\begin{cases} x = 6 + -2\lambda \\ y = 0 + 2\lambda \\ 0 = 6 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = 12 \\ \lambda = 6 \end{cases}$

dus de coördinaten van het snijpunt zijn $(-6, 12, 0)$.

41a Als $\lambda = 0$ geldt: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, dus de coördinaten zijn $(0, 4, 1)$.

Als $\lambda = 2\frac{1}{2}$ geldt: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1\frac{1}{2} \\ 8\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, dus de coördinaten zijn $\left(5, 1\frac{1}{2}, 8\frac{1}{2}\right)$.

Als $\lambda = -4$ geldt: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + -4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}$, dus de coördinaten zijn $(-8, 8, 11)$.

Als $\lambda = 10$ geldt: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 10 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -6 \\ 31 \end{pmatrix}$, dus de coördinaten zijn $(20, -6, 31)$.

b Invullen van $(8, 0, 13)$ in de lijn l met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ geeft:

$\begin{cases} 8 = 0 + 2\lambda \\ 0 = 4 - \lambda \\ 13 = 1 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = 4$

c Invullen van het punt $(10, 1, 16)$ in de lijn l met vectorvoorstelling

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ geeft: $\begin{cases} 10 = 0 + 2\lambda \\ 1 = 4 - \lambda \\ 16 = 1 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 5 \\ \lambda = 3 \end{cases}$, λ is verschillend dus het punt ligt niet op de lijn l.

Invullen van $(-6, 7, -9)$ in de vectorvoorstelling geeft:

$\begin{cases} -6 = 0 + 2\lambda \\ 7 = 4 - \lambda \\ -9 = 1 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -3 \\ \lambda = -\frac{10}{3} \end{cases}$, λ is verschillend dus het punt ligt niet op de lijn l.

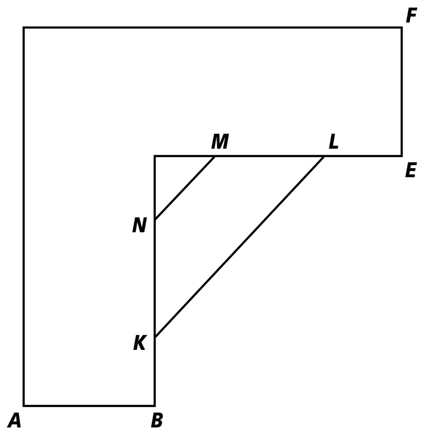
d Ja, de richtingsvector $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ is een veelvoud van $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

e Nee, de steunvectoren zijn verschillend maar de richtingsvectoren zijn hetzelfde, dus beide lijnen lopen evenwijdig met elkaar.

 © Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 24

42a



b Lijn DC is evenwijdig aan AB en omdat de twee rechthoekige blokken loodrecht op elkaar staan zijn ook de lijnen LE en QH evenwijdig aan AB.

c Ja, omdat de lijnen AB en EF allebei in het grondvlak liggen en niet evenwijdig zijn, hebben deze twee lijnen een snijpunt.

d Het verticale vlak door EH en punt K wordt tevens vastgelegd door EH en de lijn door punt K evenwijdig aan lijn EH.
Het is duidelijk dat punt N achter dit vlak ligt en dus niet in het vlak.

e Het punt N ligt niet in het vlak KEH.
De punten K, E, H en N liggen niet in één vlak, dus er is geen vlak mogelijk door de lijnen KN en EH.
De lijnen KN en EH kunnen dus niet evenwijdig zijn of elkaar snijden maar moeten elkaar kruisen.

f De lijnen KL en NM zijn evenwijdig en leggen het vlak $KLMN$ vast.
Omdat de lijnen KN en LM allebei in het vlak $KLMN$ liggen en niet evenwijdig zijn, hebben deze twee lijnen een snijpunt.

43a De lijnen AK en CL snijden elkaar als A, K, C en L in één vlak liggen.
Wanneer AC en KL evenwijdige lijnen zijn liggen A, K, C en L in één vlak.
L moet dus op lijnstuk GH liggen, zodanig dat KL evenwijdig is met AC.
Dit gebeurt indien L het midden is van lijnstuk GH.

b Omdat de lijnen FJ en BC allebei in het rechterzijvlak liggen en niet evenwijdig zijn, hebben deze twee lijnen een snijpunt.

c FI en AB:
Het punt I ligt niet in het voorvlak $ABFE$ dat wordt bepaald door de punten A, B en F.
De punten F, I, A en B liggen niet in één vlak, dus er is geen vlak mogelijk door de lijnen FI en AB.
De lijnen FI en AB kunnen dus niet evenwijdig zijn of elkaar snijden maar moeten elkaar kruisen.
BK en CH:
BC en HE zijn evenwijdige lijnen, dus liggen B, C, H en E in één vlak $BCHE$.
Omdat de lijnen BK en CH allebei in het vlak $BCHE$ liggen en niet evenwijdig zijn, hebben deze twee lijnen een snijpunt.
HI en GJ:
De lijnen HI en GJ zijn evenwijdig en leggen het vlak $GHIJ$ vast.
GK en BH:
Het punt B ligt niet in het vlak $FGHE$ dat wordt bepaald door de punten G, H en K.

© Noordhoff Uitgevers bv

De punten G, K, H en B liggen niet in één vlak, dus er is geen vlak mogelijk door de lijnen GK en BH.
De lijnen GK en BH kunnen dus niet evenwijdig zijn of elkaar snijden maar moeten elkaar kruisen.

44a $F_n = F_z \cdot \cos\alpha \Rightarrow F_n = 50 \cdot \cos 12° \approx 48{,}9N$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 18 = 0 + 6\lambda \\ 17 = 0 + 6\lambda \\ 0 = 4 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \\ \lambda = \frac{17}{6} \\ \lambda = 4 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

b Nee, het blok gaat niet schuiven want de kracht langs de helling is kleiner dan de maximale wrijvingskracht van 15N.

45a $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\vec{b} = -3 \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{b} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 9 \end{pmatrix}$

$\vec{a}$ en $\vec{b}$ hebben dezelfde richting.

b $\vec{p} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix}$ en $\vec{a} = \begin{pmatrix} -25 \\ 10 \end{pmatrix}$ Omdat $6 \cdot -25 + 15 \cdot 10 = -150 + 150 = 0$, staan $\vec{p}$ en $\vec{a}$ loodrecht op elkaar.

c $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix}$ en $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 24 \end{pmatrix}$ Dan $1 \cdot 3 + -8 \cdot 24 \neq 0$, dus $\vec{v}$ en $\vec{w}$ staan niet loodrecht op elkaar.

$\vec{w} = \lambda\vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 24 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \\ -8\lambda = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \\ \lambda = -3 \end{cases}$, λ is verschillend dus $\vec{v}$ en $\vec{w}$ hebben niet dezelfde richting.

$\vec{w} = -\lambda\vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 24 \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\lambda = 3 \\ 8\lambda = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -3 \\ \lambda = 3 \end{cases}$, λ is verschillend dus $\vec{v}$ en $\vec{w}$ hebben geen tegengestelde richting.
conclusie: geen van drieën.

d $\vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ en $\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ en omdat $0 \cdot 0 + -3 \cdot 7 \neq 0$, dus $\vec{e}$ en $\vec{f}$ staan niet loodrecht op elkaar.

$\vec{f} = \lambda \cdot \vec{e} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \lambda \cdot 0 \\ 7 = -3\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda$ mag van alles zijn en $\lambda = -\frac{7}{3}$,

$\vec{e}$ en $\vec{f}$ hebben niet dezelfde richting, dus ze zijn tegengesteld.

$\vec{f} = -\lambda\vec{e} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\lambda = 0 \\ 3\lambda = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \frac{7}{3} \end{cases}$ dus λ mag van alles zijn en $\lambda = \frac{7}{3}$, $\vec{e}$ en $\vec{f}$ hebben niet dezelfde richting, dus ze zijn tegengesteld.

 © Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 25

46a De steunvector is $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ en de richtingsvector van $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}5\\-6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-8\end{pmatrix}$.
De richtingsvector is deelbaar door vier, dus de vectorvoorstelling van de lijn AB wordt: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

b Invullen het punt $(-2\,,8\,)$ in de lijn AB met de vectorvoorstelling
$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-2=1+\lambda\\8=2-2\lambda\end{cases}\Rightarrow\lambda=-3$, dus punt C ligt op de lijn AB.

c $\overrightarrow{DA}=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}4\\-8\end{pmatrix}$ dan is $6\cdot4+4\cdot-8=24-32\neq0$, dus lijn DA staat niet loodrecht op de lijn AB.

d $\overrightarrow{DQ}=\begin{pmatrix}3\\q\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\q+2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DA}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$

$8\cdot6+4\cdot(q+2)=0\Rightarrow48+4q+8=0$
$4q+56=0\Rightarrow4q=-56\Rightarrow q=-14$

47a Bijvoorbeeld punt Q ligt niet op de lijn BC, dus punt Q en de lijn BC bepalen daarmee het vlak BCQ.
Het punt P ligt niet in het vlak BCQ.

b Het punt P ligt niet in het vlak AOT.
Dus er is geen vlak mogelijk door de lijnen AP en OT.
De lijnen AP en OT kunnen elkaar niet snijden, maar moeten elkaar kruisen.

c $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}\right|=\sqrt{4^2+0^2+0^2}=\sqrt{16}=4$, dus $OA=4$

$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix}\right|=\sqrt{1^2+5^2+0^2}=\sqrt{26}\approx5{,}1$; dus $AB\approx5{,}1$

$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\left|\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-5\\-1\\0\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-5)^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{26}\approx5{,}1$; dus $BC\approx5{,}1$

$\left|\overrightarrow{OC}\right|=\left|\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}\right|=\sqrt{0^2+4^2+0^2}=\sqrt{16}=4$, dus $OC=4$

$\left|\overrightarrow{OT}\right|=\left|\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}\right|=\sqrt{0^2+0^2+8^2}=\sqrt{64}=8$, dus $OT=8$

$\left|\overrightarrow{AT}\right|=\left|\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}4\\0\\8\end{pmatrix}\right|=\sqrt{4^2+0^2+8^2}=\sqrt{80}\approx8{,}9$; dus $AT\approx8{,}9$

© Noordhoff Uitgevers bv

$$|\overrightarrow{BT}| = \left|\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-5\\-5\\8\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2 + 8^2} = \sqrt{114} \approx 10{,}7\text{; dus } BT \approx 10{,}7$$

$$|\overrightarrow{CT}| = \left|\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\-4\\8\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + 8^2} = \sqrt{80} \approx 8{,}9\text{; dus } CT \approx 8{,}9$$

d De steunvector is $\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$ en de richtingsvector van $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\2\\4\end{pmatrix}$,

de richtingsvector is deelbaar door twee, dus de vectorvoorstelling van de lijn AP

wordt: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$.

De steunvector is $\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$ en de richtingsvector van $\overrightarrow{CQ} = \begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-4\\4\end{pmatrix}$,

de richtingsvector is deelbaar door twee, dus de vectorvoorstelling van de lijn CQ

wordt: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$.

e Als de richtingsvectoren van lijnstuk AP en CQ loodrecht op elkaar staan, dan moet gelden:

$-2\cdot 1 + 1\cdot -2 + 2\cdot 2 = 0$

Dus AP en CQ staan loodrecht op elkaar.

48a Het punt F ligt niet in het vlak $EBCD$.
De punten F, E, B en C liggen niet in één vlak, dus er is geen vlak mogelijk door de lijnen EB en CF. Deze lijnen kunnen dus elkaar niet snijden, maar moeten elkaar kruisen.

b Het vlak $PQRS$ is evenwijdig aan het grondvlak $OABC$.
De lijnen PQ en QS liggen in één vlak, dus zullen elkaar snijden.

c De steunvector is $\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}$ en de richtingsvector van $\overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\0\\6\end{pmatrix}$,

de richtingsvector is deelbaar door zes, dus de vectorvoorstelling van de lijn CF

wordt: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

Invullen het punt $(50, 8, 50)$ in de vectorvoorstelling van de lijn CF geeft:

$\begin{cases}50 = 0 + \lambda\\ 8 = 6 + 0\lambda \Rightarrow\\ 50 = 0 + \lambda\end{cases}$ $\lambda = 50$ maar….. de tweede vergelijking klopt dan niet, dus het punt ligt niet op de lijn CF.

 © Noordhoff Uitgevers bv

d De kentallen van de vectoren $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix}8\\5\\3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OR}=\begin{pmatrix}3\\8\\3\end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{OS}=\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}$

Afstand tussen P en Q: $\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\left|\begin{pmatrix}8\\5\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix}\right|=\sqrt{3^2+5^2+0^2}=\sqrt{34}\approx 5,8$

Afstand tussen P en R: $\left|\overrightarrow{PR}\right|=\left|\begin{pmatrix}3\\8\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-2\\8\\0\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-2)^2+8^2+0^2}=\sqrt{68}\approx 8,2$

e Uit $AP:PD=1:4$ volgt $AP=\frac{1}{5}\cdot AD$.

De vector $\overrightarrow{AD}$ kun je vinden met $\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\0\\8\end{pmatrix}$

De vector $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}-8\\0\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\frac{3}{5}\\0\\1\frac{3}{5}\end{pmatrix}$ hieruit volgt dat

$\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\frac{3}{5}\\0\\1\frac{3}{5}\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\frac{2}{5}\\0\\1\frac{3}{5}\end{pmatrix}$

De coördinaten van punt $P(6\frac{2}{5},0,1\frac{3}{5})$.
Uit $BQ:QE=1:4$ volgt $BQ=\frac{1}{5}\cdot BE$.

De vector $\overrightarrow{BE}$ kun je vinden met $\begin{pmatrix}8\\0\\8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8\\8\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-8\\8\end{pmatrix}$

Omdat $\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{5}\cdot\overrightarrow{BE}$ geldt: $\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}0\\-8\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\frac{3}{5}\\1\frac{3}{5}\end{pmatrix}$ hieruit volgt dat

$\overrightarrow{BQ}=\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8\\8\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\frac{3}{5}\\1\frac{3}{5}\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\6\frac{2}{5}\\1\frac{3}{5}\end{pmatrix}$

Dus is $Q(8,\ 6\frac{2}{5},\ 1\frac{3}{5})$

Uit $CR:RF=1:4$ volgt $CR=\frac{1}{5}\cdot CF$

De vector $\overrightarrow{CF}$ is dan $\begin{pmatrix}8\\8\\8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\0\\8\end{pmatrix}$

Omdat $\overrightarrow{CR}=\frac{1}{5}\cdot\overrightarrow{CF}$ geldt: $\overrightarrow{CR}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}8\\0\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\frac{3}{5}\\0\\1\frac{3}{5}\end{pmatrix}$ hieruit volgt dat

$\overrightarrow{CR}=\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\frac{3}{5}\\0\\1\frac{3}{5}\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\frac{3}{5}\\8\\1\frac{3}{5}\end{pmatrix}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

De coördinaten van punt $R(1\frac{3}{5}, 8, 1\frac{3}{5})$
Uit $OS : SG = 1 : 4$ volgt $OS = \frac{1}{5} \cdot OG$

Dus is $\vec{OG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$

Omdat $\vec{OS} = \frac{1}{5} \cdot \vec{OG}$ geldt: $\vec{OS} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1\frac{3}{5} \\ 1\frac{3}{5} \end{pmatrix}$ hieruit volgt dat

$$\vec{OS} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1\frac{3}{5} \\ 1\frac{3}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1\frac{3}{5} \\ 1\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Dus is $S(0, 1\frac{3}{5}, 1\frac{3}{5})$

f De richtingsvectoren van $\vec{PR}$ en $\vec{QS}$ zijn:

$$\vec{PR} = \begin{pmatrix} 1\frac{3}{5} \\ 8 \\ 1\frac{3}{5} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6\frac{2}{5} \\ 0 \\ 1\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\frac{4}{5} \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } \vec{QS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1\frac{3}{5} \\ 1\frac{3}{5} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 6\frac{2}{5} \\ 1\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4\frac{4}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Als twee vectoren loodrecht op elkaar staan, dan moet gelden:
$-4\frac{4}{5} \cdot 8 + 8 \cdot -4\frac{4}{5} + 0 \cdot 0 = 0$ en dit klopt.
De lijnen PR en QS staan loodrecht op elkaar.

Bladzijde 28

T-1a Wanneer je een lijn door A trekt evenwijdig aan lijn CN vind je dat behalve A, C en N ook de punten S en W in vlak ACN liggen.

b Omdat de lijnen SW en DP evenwijdig zijn, is er een vlak mogelijk door deze lijnen.

c D, R en P liggen in vlak $DPRH$. A ligt niet in dit vlak, dus kruisen de lijnen AR en DP elkaar en bestaat er geen vlak waar deze lijnen beide in liggen.

d CV gaat door het midden van MN. N ligt dus niet in vlak ACV, dus kan de lijn SN niet in vlak ACV liggen.
De lijn SN is evenwijdig met vlak ACV.

T-2a Het punt T ligt niet in het vlak $ABCD$.
De punten T, A, B en C liggen niet in één vlak, dus er is geen vlak mogelijk door de lijnen AC en BT. Deze lijnen kunnen dus elkaar niet snijden, maar moeten elkaar kruisen.

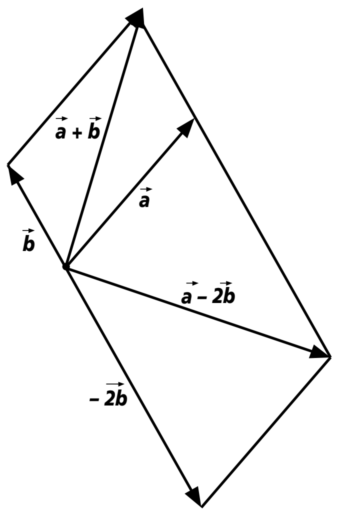
b De punten A, B, C en D liggen in één horizontaal vlak.
De lijnen AC en BD liggen in één vlak, dus zullen elkaar snijden.

c De lijnen DB en US liggen in verschillende horizontale vlakken. De lijn DB ligt in het vlak $ABCD$ en de lijn US in het vlak $RSTU$.
De vlakken $ABCD$ en $RSTU$ zijn evenwijdig, dus de lijnen DB en US zijn ook evenwijdig.

d Wanneer je in de richting van AC kijkt worden A en C op hetzelfde punt afgebeeld.
Evenzo de punten op de lijnen (stangen) A en C.

© Noordhoff Uitgevers bv

T-3



Bladzijde 29

T-4a $\vec{v}+3\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23\\12\end{pmatrix}$

$2\vec{v}-\vec{w}=2\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-11\end{pmatrix}$

b $|\vec{v}|=\left|\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}\right|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$; $|\vec{w}|=\left|\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}\right|=\sqrt{7^2+5^2}=\sqrt{74}$

$|3\vec{v}|=\left|3\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}6\\-9\end{pmatrix}\right|=\sqrt{6^2+(-9)^2}=\sqrt{117}$

$|\vec{w}-3\vec{v}|=\left|\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}1\\14\end{pmatrix}\right|=\sqrt{1^2+14^2}=\sqrt{197}$

c Omdat $2\cdot 7+-3\cdot 5=-1\neq 0$ geldt: de vectoren staan niet loodrecht op elkaar.

T-5a De steunvector is $\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}$ en de richtingsvector $\overrightarrow{KL}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$

De richtingsvector is deelbaar door vier, dus de vectorvoorstelling van de lijn KL wordt: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

b Kies een punt op de lijn KL. Invullen het punt $(1,3)$ in de vectorvoorstelling geeft:

$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\13\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}1=6+v\\3=13+2v\end{cases}\Rightarrow v=-5$

Ja, het is ook een vectorvoorstelling van de lijn KL.

c Invullen van het punt $(3\frac{1}{2},8)$ in de vectorvoorstelling geeft:

$\begin{pmatrix}3\frac{1}{2}\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}3\frac{1}{2}=-3+\lambda\\8=-5+2\lambda\end{cases}\Rightarrow\lambda=6\frac{1}{2}$, dus het punt ligt op de lijn KL.

d Invullen van het punt $(27,p)$ in de vectorvoorstelling geeft:

$\begin{pmatrix}27\\p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}27=-3+\lambda\\p=-5+2\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=30\\p=55\end{cases}$

T-6a $D(0,0,0)$; $A(6,0,0)$; $B(6,6,0)$; $C(0,6,0)$; $H(0,0,6)$; $E(6,0,6)$; $F(6,6,6)$ en $G(0,6,6)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b $K(0,0,4)$; $L(6,6,3)$ en $M(6,0,2)$.

c Afstand tussen M en G geldt: $|\overrightarrow{MG}| = \left|\begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\0\\2\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\6\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2+6^2+4^2} = \sqrt{52} \approx 7,2$

d De steunvector is $\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$ en de richtingsvector $\overrightarrow{KL} = \begin{pmatrix}6\\6\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\6\\-1\end{pmatrix}$

De vectorvoorstelling van de lijn KL wordt: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}6\\6\\-1\end{pmatrix}$

e Invullen het punt $(18, 17, 0)$ in de vectorvoorstelling geeft:

$$\begin{pmatrix}18\\17\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}6\\6\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}18 = 0+6\lambda\\17 = 0+6\lambda\\0 = 4-\lambda\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda = 3\\\lambda = \frac{17}{6}\\\lambda = 4\end{cases}$$

λ is verschillend dus ligt het punt $(18, 17, 0)$ niet op de lijn KL.

T-7a M en L liggen in hetzelfde zijvlak evenals M en K, dus de lijn ML en MK kun je direct tekenen. Omdat $ADHE$ en $BCGF$ evenwijdige vlakken zijn, kun je ook een lijn door L tekenen evenwijdig aan MK. Deze snijdt ribbe CG in N.
De doorsnede is $MLNK$. Het punt G ligt niet in het vlak $MLNK$.
De punten G, K, M en L liggen niet in één vlak, dus er is geen vlak mogelijk door de lijnen KM en GL.

b De steunvector is $\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}$ en de richtingsvector $\overrightarrow{CE} = \begin{pmatrix}6\\0\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-6\\6\end{pmatrix}$

De richtingsvector is deelbaar door zes, dus de vectorvoorstelling van de lijn CE

wordt: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

c Het punt M ligt niet in het vlak $ABGH$. De punten M, B, G en H liggen niet in één vlak, dus er is geen vlak mogelijk door de lijnen HB en MG.
De lijnen kunnen dus elkaar niet snijden, maar moeten elkaar kruisen.

d De steunvector is $\begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix}$ en de richtingsvector $\overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}$.

De richtingsvector is deelbaar door zes, dus de vectorvoorstelling van de lijn BF
wordt: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

e Een vectorvoorstelling van de lijn CE is $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

© Noordhoff Uitgevers bv

Invullen het punt *P*, het midden van *KL*, dus $(3, 3, 3\frac{1}{2})$ in de vectorvoorstelling geeft:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3 = \lambda \\ 3 = 6 - \lambda \Rightarrow \\ 3\frac{1}{2} = \lambda \end{cases} \begin{cases} \lambda = 3 \\ \lambda = 3\frac{1}{2} \end{cases}$$

λ is verschillend dus het punt ligt niet op de lijn *CE*.

f $$\left|\overrightarrow{PG}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + (2\frac{1}{2})^2} = \sqrt{24,25} \approx 4,9$$

$$\left|\overrightarrow{PB}\right| = \left|\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + (-3\frac{1}{2})^2} = \sqrt{30,25} = 5,5$$

De afstand tussen *P* en *G* is kleiner dan de afstand tussen *P* en *B*.
Dus *P* ligt dichter bij *G*.

T-8 Nee, want een vectorvoorstelling van een lijn is $\vec{v} = \vec{s} + \lambda\vec{r}$. Hierbij horen ook de verticale lijnen want voor een verticale lijn bij een vectorvoorstelling geldt: $\vec{v} = \vec{s} + \lambda\vec{r}$ met $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ r_2 \end{pmatrix}$.

© Noordhoff Uitgevers bv