

## Hoofdstuk 2 - Lijnen en vlakken

### Bladzijde 32

- 1a** Het startgetal is vijf en het hellingsgetal is  $-2\frac{1}{2}$ .
- b** Invullen van het punt  $(2, 0)$  in de formule geeft:  $0 = -2\frac{1}{2} \cdot 2 + 5$ , klopt.  
De lijn  $l$  snijdt de  $x$ -as in punt  $(2, 0)$ .  
Invullen van het punt  $(0, 5)$  in de formule geeft:  $5 = -2\frac{1}{2} \cdot 0 + 5$ , klopt.  
De lijn  $l$  snijdt de  $y$ -as in punt  $(0, 5)$ .
- c** Bij lijn  $m$  hoort de lineaire formule:  $y = -\frac{1}{2}x + 3$ .
- d** Bij lijn  $k$  hoort de lineaire formule:  $y = \frac{1}{2}x - 2$ .
- 2a** Bij lijn  $m$  hoort de lineaire formule:  $\frac{1}{2}x + y = 3$  of  $x + 2y = 6$
- b** Bij lijn  $k$  hoort de lineaire formule:  $-\frac{1}{2}x + y = -2$  of  $-x + 2y = -4$
- 3a** Snijpunt met de  $x$ -as betekent dat  $y = 0$ , dus  $\frac{x}{2} + \frac{0}{5} = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} = 1 \Rightarrow x = 2$   
Het snijpunt is  $(2, 0)$ .  
Snijpunt met de  $y$ -as betekent dat  $x = 0$ , dus  $\frac{0}{2} + \frac{y}{5} = 1 \Rightarrow \frac{y}{5} = 1 \Rightarrow y = 5$   
Het snijpunt is  $(0, 5)$ .
- b** Bij lijn  $m$  hoort de formule:  $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1$   
Bij lijn  $k$  hoort de formule:  $\frac{x}{4} - \frac{y}{2} = 1$
- c** Snijpunt met de  $x$ -as betekent dat  $y = 0$ , dus  $\frac{x}{-6} + \frac{0}{3} = 1 \Rightarrow \frac{x}{-6} = 1 \Rightarrow x = -6$   
Het snijpunt is  $(-6, 0)$ .  
Snijpunt met de  $y$ -as betekent dat  $x = 0$ , dus  $\frac{0}{-6} + \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow y = 3$   
Het snijpunt is  $(0, 3)$ .
- d** Bij lijn  $j$  hoort de formule:  $\frac{x}{9} - \frac{y}{4} = 1$ .

### Bladzijde 33

- 4a**  $\frac{x}{6} + \frac{y}{18} = 1$ ;  $3x + y = 18$  en  $y = -3x + 18$
- b**  $\frac{x}{4} + \frac{y}{14} = 1$ ;  $3\frac{1}{2}x + y = 14$  en  $y = -3\frac{1}{2}x + 14$
- c**  $\frac{x}{9} + \frac{y}{6} = 1$ ;  $\frac{2}{3}x + y = 6$  en  $y = -\frac{2}{3}x + 6$
- d**  $\frac{x}{-4} + \frac{y}{20} = 1$ ;  $-5x + y = 20$  en  $y = 5x + 20$
- e**  $\frac{x}{-5} + \frac{y}{7\frac{1}{2}} = 1$ ;  $-1\frac{1}{2}x + y = 7\frac{1}{2}$  en  $y = 1\frac{1}{2}x + 7\frac{1}{2}$
- f**  $\frac{x}{-1} - \frac{y}{7} = 1$ ;  $7x + y = -7$  en  $y = -7x - 7$
- 5a** De vectorvoorstelling hoort bij lijn  $m$  met de formule:  $y = -\frac{1}{2}x + 3$
- b** De richtingsvector is deelbaar door drie, dus de vectorvoorstelling van de lijn wordt
- $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c Een vectorvoorstelling van lijn  $l$  is:  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

Een vectorvoorstelling van lijn  $k$  is:  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

6a De richtingsvector van lijn  $r$  is  $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$  is de steunvector.

Een vectorvoorstelling van lijn  $r$  is  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ .

b Invullen van het punt  $(3, 4)$  in de vectorvoorstelling geeft:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3 = 2 + \lambda \\ 4 = 8 - 4\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = 1$$

Het punt ligt op lijn  $r$ .

Invullen van het punt  $(4, 0)$  in de vectorvoorstelling geeft:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4 = 2 + \lambda \\ 0 = 8 - 4\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = 2$$

Het punt ligt op lijn  $r$ .

Invullen van het punt  $(1, 12)$  in de vectorvoorstelling geeft:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 2 + \lambda \\ 12 = 8 - 4\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = -1$$

Het punt ligt op lijn  $r$ .

Invullen van het punt  $(0, 16)$  in de vectorvoorstelling geeft:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 2 + \lambda \\ 16 = 8 - 4\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = -2$$

Het punt ligt op lijn  $r$ .

Invullen van het punt  $(-1, 20)$  in de vectorvoorstelling geeft:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -1 = 2 + \lambda \\ 20 = 8 - 4\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = -3$$

Het punt ligt op lijn  $r$ .

c Het hellingsgetal is  $-4$ .

d Een vergelijking van lijn  $r$  is  $y = -4x + 16$ .

e  $4x + y = 16$

7a De richtingsvector  $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  geeft aan dat het hellingsgetal  $\frac{4}{3}$  is.

De steunvector  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  geeft aan dat het startpunt  $(0, 2)$  is.

b Een richtingsvector is de verplaatsing in  $x$ - en  $y$ -richting aangeduid met  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

Een hellingsgetal of richtingscoëfficiënt is de verhouding  $\frac{y}{x}$  als  $x$  en  $y$  de kentallen van een richtingsvector zijn.

c Invullen van het punt  $(18, 26)$  in lijn  $k$  geeft:

$$\begin{pmatrix} 18 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 18 = 0 + 3\lambda \\ 26 = 2 + 4\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = 6$$

Invullen van het punt  $(-7\frac{1}{2}, -8)$  in lijn  $k$  geeft:

$$\begin{pmatrix} -7\frac{1}{2} \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -7\frac{1}{2} = 0 + 3\lambda \\ -8 = 2 + 4\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = -2\frac{1}{2}$$

**d** Invullen van het punt  $(x, 0)$  in de vectorvoorstelling geeft:

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 + 3\lambda \\ 0 = 2 + 4\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \\ x = -1\frac{1}{2} \end{cases}$$

**e**  $x = -1\frac{1}{2}$ , dus de coördinaten van het snijpunt met de  $x$ -as zijn  $(-1\frac{1}{2}, 0)$ .

**f** Kies het punt  $(0, 2)$  en substitueer in de vergelijking  $-4x + 3y = 6$ :

$$-4 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 6, \text{ klopt.}$$

Dus  $-4x + 3y = 6$  is een vergelijking van lijn  $k$ .

**g**  $-\frac{4}{3}x + y = 2$  of  $y = \frac{4}{3}x + 2$

**h** Substitueer voor  $x = 3\lambda$  en  $y = 2 + 4\lambda$  in de vergelijking  $-4x + 3y = 6$  geeft:

$$-4 \cdot 3\lambda + 3(2 + 4\lambda) = 6 \Rightarrow -12\lambda + 6 + 12\lambda = 6 \Rightarrow 0 = 0, \text{ klopt.}$$

De vectorvoorstelling en de vergelijking horen bij dezelfde lijn.

**8a** Een verticale lijn is altijd van de vorm  $x = c$ . In deze vergelijking komt  $y$  niet voor.

**b** Er is geen snijpunt met de  $y$ -as, dus  $\frac{y}{q}$  hoort er niet bij.

Je kunt ook zeggen dat het snijpunt oneindig ver wegligt en dan is  $\frac{y}{\text{oneindig}} = 0$ .

**c** Lijn  $m$  staat verticaal, dus  $b = 0$ . Hieruit volgt dat  $x = c$ .

**d** 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

### Bladzijde 34

**9a**  $O(0,0,0)$ ;  $A(5,0,0)$ ;  $B(5,6,0)$ ;  $C(0,6,0)$ ;  $D(0,0,4)$ ;  $E(5,0,4)$ ;  $F(5,6,4)$  en  $G(0,6,4)$ .

**b** Steunvector  $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$  en de richtingsvector van  $\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$

Een vectorvoorstelling van lijn  $DB$  is: 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Steunvector  $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$  en de richtingsvector van  $\overrightarrow{EP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

De richtingsvector is deelbaar door twee, dus de vectorvoorstelling van lijn  $EP$

wordt: 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

**c** Als de richtingsvectoren van de lijnen dezelfde of tegengestelde richting hebben.

d De richtingsvector van  $\overline{DB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$

De richtingsvector van  $\overline{QM} = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{2} \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{2} \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

De richtingsvectoren zijn niet gelijk, dus ze zijn niet evenwijdig.

e Steunvector  $\overline{OR} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$  en de richtingsvector van  $\overline{RC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

De richtingsvector is deelbaar door twee, dus de vectorvoorstelling van lijn  $RC$

wordt:  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

f De lijn  $RC$  is evenwijdig met de lijn  $EP$ . De richtingsvectoren  $\overline{EP} = \overline{RC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

- 10a** De richtingsvectoren hebben een tegengestelde richting, dus de lijnen zijn evenwijdig of vallen samen.

Kies het punt  $(-2, -3, 10)$  van lijn  $m$  en substitueer in lijn  $l$ , dit geeft:

$$x = 4 + 2\lambda \text{ geeft } x = -2 \text{ voor } \lambda = -3$$

$$y = \lambda \text{ geeft } y = -3 \text{ voor } \lambda = -3$$

$$z = 1 - 3\lambda \text{ geeft } z = 10 \text{ voor } \lambda = -3$$

Het punt  $(-2, -3, 10)$  ligt ook op  $l$  en dus vallen de lijnen samen.

- b** Substitueer het punt  $(16, 6, -17)$  in lijn  $l$  geeft:

$$\lambda = -3 \text{ geeft } x = 16 \text{ voor } \lambda = 6$$

$$y = \lambda \text{ geeft } y = 6 \text{ voor } \lambda = 6$$

$$z = 1 - 3\lambda \text{ geeft } z = -7 \text{ voor } \lambda = \frac{8}{3}$$

Nee,  $\lambda$  is verschillend dus het punt  $(16, 6, -7)$  ligt niet op lijn  $l$ .

- c** Substitueer het punt  $(-2, -3, 10)$  in lijn  $l$  geeft:

$$\lambda = -3 \text{ geeft } x = -2 \text{ voor } \lambda = -3$$

$$y = \lambda \text{ geeft } y = -3 \text{ voor } \lambda = -3$$

$$z = 1 - 3\lambda \text{ geeft } z = 10 \text{ voor } \lambda = -3$$

Het punt  $(-2, -3, 10)$  ligt ook op lijn  $l$ .

- d** Substitueer het punt  $(16, 6, -17)$  in lijn  $m$  geeft:

$$x = -2 - 4\mu \text{ geeft } x = 16 \text{ voor } \mu = -4\frac{1}{2}$$

$$y = -3 - 2\mu \text{ geeft } y = 6 \text{ voor } \mu = -4\frac{1}{2}$$

$$z = 10 + 6\mu \text{ geeft } z = -7 \text{ voor } \mu = \frac{-17}{6} = -2\frac{5}{6}$$

$\mu$  is verschillend, dus het punt  $(16, 6, -17)$  ligt niet op lijn  $m$ .

- 11** De richtingsvectoren hebben een tegengestelde richting, dus de lijnen zijn evenwijdig of vallen samen.

Kies het punt  $(0, -2, 5)$  van lijn  $m$  en substitueer in lijn  $l$  geeft:

$$x = 21 + 7\lambda \text{ geeft } x = 0 \text{ voor } \lambda = -3$$

$$y = -11 - 3\lambda \text{ geeft } y = -2 \text{ voor } \lambda = -3$$

$$z = -1 - 2\lambda \text{ geeft } z = 5 \text{ voor } \lambda = -3.$$

De lijnen  $l$  en  $m$  vallen samen.

**Bladzijde 35**

**12a** De steunvector  $\overline{OQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  en de richtingsvector van  $\overline{PQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

De richtingsvector wordt met  $-1$  vermenigvuldigd.

De vectorvoorstelling van de lijn  $PQ$  wordt  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

De steunvector  $\overline{OR} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  en de richtingsvector van  $\overline{RS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

De richtingsvector wordt met  $-1$  vermenigvuldigd.

De vectorvoorstelling van de lijn  $RS$  wordt  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$

**b** Voor de richtingsvectoren onderling moeten gelden  $\begin{cases} -4\lambda = 4 \\ 0\lambda = -5 \\ 3\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ 0 = -5 \\ \lambda = 0 \end{cases}$

dus de richtingsvectoren zijn niet in overeenstemming.

**13a** Een punt op lijn  $RS$  is  $(4 + 4\mu, -5\mu, 2)$ . Substitueer het punt in lijn  $PQ$  geeft:  
 $x = 4 - 4\lambda$  geeft  $x = 4 + 4\mu$  voor  $4 - 4\lambda = 4 + 4\mu$ .

**b** De steunvector is  $\overline{OB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$  en de richtingsvector van  $\overline{DB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

De vectorvoorstelling van lijn  $DB$  wordt  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

De steunvector  $\overline{OS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$  en de richtingsvector van  $\overline{RS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

De vectorvoorstelling van lijn  $RS$  wordt  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Voor een snijpunt moet gelden:

$$\begin{cases} 4 + 4\lambda = -4\mu \cdots (1) \\ 5 + 5\lambda = 5 + 5\mu \cdots (2) \\ -3\lambda = 2 \cdots (3) \end{cases}$$

Uit vergelijking (3) volgt  $\lambda = -\frac{2}{3}$ . Substitueer  $\lambda = -\frac{2}{3}$  in (2) geeft:

$$5 + 5 \cdot \frac{-2}{3} = 5 + 5\mu \Rightarrow \mu = -\frac{2}{3}$$

Substitueer  $\lambda = -\frac{2}{3}$  en  $\mu = -\frac{2}{3}$  in (1) geeft:

$$4 + 4 \cdot \frac{-2}{3} = -4 \cdot \frac{-2}{3}$$

$1\frac{1}{3} = 2\frac{2}{3}$ , klopt niet. Er zijn geen passende waarden voor  $\lambda$  en  $\mu$ .

De lijnen snijden elkaar niet.

c De steunvector  $\overline{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  en de richtingsvector van  $\overline{AP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

De vectorvoorstelling van lijn  $AP$  wordt:  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

De steunvector  $\overline{OG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$  en de richtingsvector van  $\overline{BG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

De vectorvoorstelling van lijn  $BG$  wordt:  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Voor een snijpunt moet gelden:

$$\begin{cases} -4\lambda = -4\mu \cdots (1) \\ 2 + 2\lambda = 5 \cdots (2) \\ 3 + 3\lambda = 3 + 3\mu \cdots (3) \end{cases}$$

Uit vergelijking (2) volgt  $\lambda = 1\frac{1}{2}$ .

Substitueer  $\lambda = 1\frac{1}{2}$  in (1) geeft:  $-4 \cdot 1\frac{1}{2} = -4\mu \Rightarrow \mu = 1\frac{1}{2}$

Substitueer  $\lambda = 1\frac{1}{2}$  en  $\mu = 1\frac{1}{2}$  in (3) geeft:  $3 + 3 \cdot 1\frac{1}{2} = 3 + 3 \cdot 1\frac{1}{2}$  en dit klopt.

Voor  $\lambda = 1\frac{1}{2}$  en  $\mu = 1\frac{1}{2}$  snijden de lijnen elkaar in het punt  $(-6, 5, 7\frac{1}{2})$ .

- 14** De richtingsvectoren van de lijnen  $l, m$  en  $a$  zijn veelvoudig van elkaar. Dus de lijnen zijn evenwijdig of vallen samen.

Kies het punt  $(1, 4, 4)$  op lijn  $m$  en substitueer het punt in lijn  $l$ :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 1 \cdots (1) \\ 2 + \lambda = 4 \cdots (2) \\ 2\lambda = 4 \cdots (3) \end{cases}$$

Uit (2) en (3) volgt  $\lambda = 2$ .

Het punt  $(1, 4, 4)$  ligt zowel op lijn  $l$  als op lijn  $m$ . Dus de lijnen vallen samen.

Kies het punt  $(1, 0, -2)$  op lijn  $a$  en substitueer het punt in lijn  $l$ :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 1 \cdots (1) \\ 0 = 2 + \lambda \cdots (2) \\ -2 = 2\lambda \cdots (3) \end{cases}$$

Uit (2) volgt  $\lambda = -2$  en uit (3) volgt  $\lambda = -1$

Het punt  $(1, 0, -2)$  ligt niet op  $l$ . De lijnen zijn evenwijdig.

Omdat de lijnen  $l$  en  $m$  samenvallen, geldt dat  $m$  en  $a$  evenwijdig zijn.

$$\text{Als de lijnen } n \text{ en } a \text{ elkaar snijden geldt: } \begin{cases} -1 + v = 1 \cdots (1) \\ 5 = -\alpha \cdots (2) \\ 4v = -2 - 2\alpha \cdots (3) \end{cases}$$

Uit (1) volgt  $v = 2$  en uit (2) volgt  $\alpha = -5$

Substitueer  $v = 2$  en  $\alpha = -5$  in (3) geeft:

$$4 \cdot 2 = -2 - 2 \cdot (-5) \Rightarrow 8 = 8, \text{ dat klopt.}$$

Voor  $v = 2$  en  $\alpha = -5$  snijden de lijnen  $n$  en  $a$  elkaar in het punt  $(1, 5, 8)$ .

$$\text{Als de lijnen } l \text{ en } a \text{ elkaar snijden geldt: } \begin{cases} 1 = -1 + v \cdots (1) \\ 2 + \lambda = 5 \cdots (2) \\ 2\lambda = 4v \cdots (3) \end{cases}$$

Uit (1) volgt  $v = 2$  en uit (2) volgt  $\lambda = 3$

Substitueer  $v = 2$  en  $\lambda = 3$  in (3) geeft:  $2 \cdot 3 = 4 \cdot 2$ , het klopt niet.

Er zijn geen passende waarden voor  $v$  en  $\lambda$ . De lijnen  $l$  en  $a$  kruisen elkaar.

De lijnen  $l$  en  $m$  vallen samen, dus de lijnen  $m$  en  $a$  zullen ook elkaar kruisen.

**Bladzijde 36**

**15a** Het punt  $Q$  ligt op lijnstuk  $OE$  met  $\overline{OQ} = \frac{1}{4} \cdot \overline{OE} \Rightarrow \overline{OQ} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Het punt  $P$  ligt op lijnstuk  $OC$  met  $\overline{OP} = \frac{1}{3} \cdot \overline{OC} \Rightarrow \overline{OP} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

**b**  $\overline{OQ} + \overline{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

**c**  $3 \cdot \overline{OQ} + 2 \cdot \overline{OP} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+0 \\ 0+4 \\ 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

**d** Substitueer  $\lambda = 2$  en  $\mu = 3$  in de vectorvoorstelling  $\overline{OX} = \lambda \cdot \overline{OQ} + \mu \cdot \overline{OP}$

geeft:  $\overline{OX} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0 \\ 0+6 \\ 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\overline{OL} = \overline{OC} + \frac{1}{2} \cdot \overline{CF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

De plaatsvector van punt  $L$ .

- e Substitueer  $\lambda = 2$  en  $\mu = \frac{1}{2}$  in de vectorvoorstelling  $\overline{OX} = \lambda \cdot \overline{OQ} + \mu \cdot \overline{OP}$  geeft:

$$\overline{OX} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0 \\ 0+1 \\ 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OP} + \overline{OE}) = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

De plaatsvector van punt  $M$ .

- f  $\overline{OX} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  en  $\overline{OV} = \frac{3}{4}\overline{OE} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Hieruit volgt  $\lambda = 3$  en  $\mu = 0$  met  $V(6, 0, 3)$ .

$$\overline{OX} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } \overline{OT} = \overline{OP} + \frac{3}{4}\overline{OE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Hieruit volgt  $\lambda = 3$  en  $\mu = 1$  met  $T(6, 2, 3)$ .

$$\overline{OX} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } \overline{OS} = \frac{2}{3}\overline{OC} + \frac{3}{4}\overline{OE} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Hieruit volgt  $\lambda = 3$  en  $\mu = 2$  met  $S(6, 4, 3)$ .

$$\overline{OX} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } \overline{OW} = \overline{OC} + \frac{3}{4}\overline{OE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Hieruit volgt  $\lambda = 3$  en  $\mu = 3$  met  $W(6, 6, 3)$ .

$$\overline{OX} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } \overline{OU} = \frac{2}{3}\overline{OC} + \frac{1}{4}\overline{OE} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hieruit volgt  $\lambda = 1$  en  $\mu = 2$  met  $U(2, 4, 1)$ .

$$\overline{OX} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } \overline{OR} = \frac{1}{3}\overline{OC} + \frac{1}{4}\overline{OE} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hieruit volgt  $\lambda = 1$  en  $\mu = 1$  met  $R(2, 2, 1)$ .

16a  $\overline{OH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\overline{HQ} = \frac{1}{4}\overline{HE} = \frac{1}{4} \left( \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{HP} = \frac{1}{3}\overline{HI} = \frac{1}{3} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- b  $\overline{OH} + 3\overline{HQ} + 2\overline{HP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$  De plaatsvector heeft eindpunt  $S$ .

c  $\overline{OH} + 2\overline{HQ} + \frac{1}{2}\overline{HP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$  De plaatsvector heeft eindpunt  $M$ .

d Substitueer  $\lambda = 4$  en  $\mu = 3$  in de vectorvoorstelling geeft:

$$\overline{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$
 De plaatsvector heeft eindpunt  $F$ .

e Substitueer  $\lambda = 3$  en  $\mu = 0$  in de vectorvoorstelling geeft:

$$\overline{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$
 De plaatsvector heeft eindpunt  $V$ .

f Voor het punt  $Q$  geldt:  $\overline{OX} = \overline{OH} + \overline{HQ} + 0 \cdot \overline{HP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

De coördinaten van  $Q$  zijn  $(2, 0, 3)$  horen bij  $\lambda = 1$  en  $\mu = 0$ .

Voor het punt  $V$  geldt:  $\overline{OX} = \overline{OH} + 3 \cdot \overline{HQ} + 0 \cdot \overline{HP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

De coördinaten  $(6, 0, 5)$  horen bij  $\lambda = 3$  en  $\mu = 0$ .

Voor het punt  $E$  geldt:  $\overline{OX} = \overline{OH} + 4 \cdot \overline{HQ} + 0 \cdot \overline{HP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

De coördinaten van  $E(8, 0, 6)$  horen bij  $\lambda = 4$  en  $\mu = 0$ .

Voor het punt  $P$  geldt:  $\overline{OX} = \overline{OH} + 0 \cdot \overline{HQ} + 1 \cdot \overline{HP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

De coördinaten van  $P(0, 2, 2)$  horen bij  $\lambda = 0$  en  $\mu = 1$ .

Voor het punt  $R$  geldt:  $\overline{OX} = \overline{OH} + \overline{HQ} + \overline{HP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

De coördinaten van  $R(2, 2, 3)$  horen bij  $\lambda = 1$  en  $\mu = 1$ .

Voor het punt  $T$  geldt:  $\overline{OX} = \overline{OH} + 3 \cdot \overline{HQ} + \overline{HP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

De coördinaten van  $T(6, 2, 5)$  horen bij  $\lambda = 3$  en  $\mu = 1$ .

Voor het punt  $K$  geldt:  $\overline{OX} = \overline{OH} + 0 \cdot \overline{HQ} + 2 \cdot \overline{HP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

De coördinaten van  $K(0, 4, 2)$  horen bij  $\lambda = 0$  en  $\mu = 2$ .

Voor het punt  $U$  geldt:  $\overline{OX} = \overline{OH} + \overline{HQ} + 2 \cdot \overline{HP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

De coördinaten van  $U(2, 4, 3)$  horen bij  $\lambda = 1$  en  $\mu = 2$ .

Voor het punt  $L$  geldt:  $\overline{OX} = \overline{OH} + 2 \cdot \overline{HQ} + 3 \cdot \overline{HP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

De coördinaten van  $L(4, 6, 4)$  horen bij  $\lambda = 2$  en  $\mu = 3$ .

Voor het punt  $W$  geldt:  $\overline{OX} = \overline{OH} + 3 \cdot \overline{HQ} + 3 \cdot \overline{HP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$

De coördinaten van  $W(4, 6, 4)$  horen bij  $\lambda = 3$  en  $\mu = 3$ .

Voor het punt  $I$  geldt:  $\overline{OX} = \overline{OH} + 0 \cdot \overline{HQ} + 3 \cdot \overline{HP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

De coördinaten van  $I(0, 6, 2)$  horen bij  $\lambda = 0$  en  $\mu = 3$ .

**Bladzijde 37**

**17a** De steunvector is  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

**b** De richtingsvector  $\overline{PQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

De richtingsvector  $\overline{PR} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ .

**c** Een vectorvoorstelling van het vlak  $PQR$  is  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ .

**18** De plaatsvector  $\overline{OK} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$  is dan een steunvector.

De richtingsvector  $\overline{KL} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

De richtingsvector  $\overline{KM} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

Een vectorvoorstelling van het vlak  $KLM$  is  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

**19a** Substitueer  $\lambda = 1$  en  $\mu = -3$  in de vectorvoorstelling van  $V$  geeft:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

De coördinaten van het punt zijn  $(5, 6, -6)$ .

**b** Substitueer het punt  $(8, 6, -4)$  in de vectorvoorstelling van  $V$  geeft:

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 8 = 2 + 3\lambda \dots (1) \\ 6 = -2\mu \dots (2) \\ -4 = 1 + 2\lambda + 3\mu \dots (3) \end{cases}$$

Uit (1) volgt  $\lambda = 2$  en uit (2) volgt  $\mu = -3$

Substitueer  $\lambda = 2$  en  $\mu = -3$  in (3) geeft:

$$-4 = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot -3 \Rightarrow -4 = 1 + 4 - 9 \Rightarrow -4 = -4, \text{ dat klopt.}$$

Dus  $\lambda = 2$  en  $\mu = -3$  horen bij het punt  $(8, 6, -4)$ .

- c** Substitueer het punt  $(5, 1, 8)$  in de vectorvoorstelling van  $V$  geeft:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5 = 2 + 3\lambda \cdots (1) \\ 1 = -2\mu \cdots (2) \\ 8 = 1 + 2\lambda + 3\mu \cdots (3) \end{cases}$$

Uit (1) volgt  $\lambda = 1$  en uit (2) volgt  $\mu = -\frac{1}{2}$

Substitueer  $\lambda = 1$  en  $\mu = -\frac{1}{2}$  in (3) geeft:  $8 = 1 + 2 - 1\frac{1}{2}$ , en dat klopt niet.

Dus er zijn geen passende waarden voor  $\lambda$  en  $\mu$ .

Het punt ligt niet in vlak  $V$ .

- d** Substitueer het punt  $A(5, 1, 6)$  in de vectorvoorstelling van  $V$  geeft:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5 = 2 + 3\lambda \cdots (1) \\ 1 = -2\mu \cdots (2) \\ 6 = 1 + 2\lambda + 3\mu \cdots (3) \end{cases}$$

Uit (1) volgt  $\lambda = 1$  en uit (2) volgt  $\mu = -\frac{1}{2}$

Substitueer  $\lambda = 1$  en  $\mu = -\frac{1}{2}$  in (3) geeft:  $6 = 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot -\frac{1}{2} \rightarrow 6 = 1\frac{1}{2}$ , dat klopt niet. Dus het punt  $A$  ligt niet in vlak  $V$ .

Substitueer het punt  $B(-1, -4, 6)$  in de vectorvoorstelling van  $V$  geeft:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -1 = 2 + 3\lambda \cdots (1) \\ -4 = -2\mu \cdots (2) \\ 6 = 1 + 2\lambda + 3\mu \cdots (3) \end{cases}$$

Uit (1) volgt  $\lambda = -1$  en uit (2) volgt  $\mu = 2$

Substitueer  $\lambda = -1$  en  $\mu = 2$  in (3) geeft:  $6 = 1 + 2 \cdot -1 + 3 \cdot 2$  dus zou  $6 = 5$ , dat klopt niet.

Dus het punt  $B$  ligt niet in vlak  $V$ .

Substitueer het punt  $C(-1, 0, -1)$  in de vectorvoorstelling van  $V$  geeft:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -1 = 2 + 3\lambda \cdots (1) \\ 0 = -2\mu \cdots (2) \\ -1 = 1 + 2\lambda + 3\mu \cdots (3) \end{cases}$$

Uit (1) volgt  $\lambda = -1$  en uit (2) volgt  $\mu = 0$

Substitueer  $\lambda = -1$  en  $\mu = 0$  in (3) geeft:  $-1 = 1 + 2 \cdot -1 + 3 \cdot 0$ , dat klopt.

Dus het punt  $C$  ligt in het vlak  $V$ .

Substitueer het punt  $D(-1, -6, 8)$  in de vectorvoorstelling van  $V$  geeft:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -1 = 2 + 3\lambda \cdots (1) \\ -6 = -2\mu \cdots (2) \\ 8 = 1 + 2\lambda + 3\mu \cdots (3) \end{cases}$$

Uit (1) volgt  $\lambda = -1$  en uit (2) volgt  $\mu = 3$

Substitueer  $\lambda = -1$  en  $\mu = 3$  in (3) geeft:  $8 = 1 + 2 \cdot -1 + 3 \cdot 3$ , dat klopt.

Dus het punt  $D$  ligt in het vlak  $V$ .

- 20a** De lijnen  $l$  en  $m$  hebben dezelfde richtingsvectoren, dus de lijnen vallen samen of zijn evenwijdig.

Substitueer het punt  $(4, 1, 1)$  in de vectorvoorstelling van lijn  $m$  geeft:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4 = 4 \dots (1) \\ 1 = 2\mu \dots (2) \\ 1 = 3 + \mu \dots (3) \end{cases}$$

Uit (2) volgt  $\mu = \frac{1}{2}$ .

Substitueer  $\mu = \frac{1}{2}$  in (3) geeft:  $1 = 3 + \frac{1}{2}$ , dat klopt niet.

Het punt  $(4, 1, 1)$  ligt niet op lijn  $m$  en dus vallen de lijnen niet samen.

De lijnen  $l$  en  $m$  zijn evenwijdig.

- b** Een vectorvoorstelling van het vlak door de lijnen  $l$  en  $m$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- c** Substitueer het punt  $(4, 3, 2)$  in de vectorvoorstelling van lijn  $l$  geeft:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4 = 4 \dots (1) \\ 3 = 1 + 2\lambda \dots (2) \\ 2 = 1 + \lambda \dots (3) \end{cases}$$

Uit (2) en (3) volgt  $\lambda = 1$

Substitueer het punt  $(4, 3, 2)$  in de vectorvoorstelling van lijn  $n$  geeft:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4 = 2 + v \dots (1) \\ 3 = 3 \dots (2) \\ 2 = 4 - v \dots (3) \end{cases}$$

Uit (1) en (3) volgt  $v = 2$

Voor  $\lambda = 1$  en  $v = 2$  snijden de lijnen  $l$  en  $n$  elkaar.

- d** Een vectorvoorstelling van het vlak door de lijnen  $l$  en  $n$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- e** Voor snijden geldt  $\begin{cases} 4 = 1 - \alpha \dots (1) \\ 2\mu = 3\alpha \dots (2) \\ 3 + \mu = 1 \dots (3) \end{cases}$

Uit (3) volgt  $\mu = -2$  en uit (1) volgt  $\alpha = -3$

Substitueer  $\alpha = -3$  en  $\mu = -2$  in (2) geeft:  $2 \cdot -2 = 3 \cdot -3 \Rightarrow -4 = -9$ , dat klopt niet.

De lijnen  $m$  en  $a$  snijden elkaar niet, dus zijn twee kruisende lijnen.

- f** Nee, een vlak wordt niet vastgelegd door twee kruisende lijnen.

- g** Voor snijden geldt  $\begin{cases} 2 + v = 4 \dots (1) \\ 3 = 2\mu \dots (2) \\ 4 - v = 3 + \mu \dots (3) \end{cases}$

Uit (1) volgt  $v = 2$  en uit (2) volgt  $\mu = 1\frac{1}{2}$

Substitueer  $v = 2$  en  $\mu = 1\frac{1}{2}$  in (3) geeft:  $4 - 2 = 3 + 1\frac{1}{2}$ , dat klopt niet.

De lijnen  $m$  en  $n$  snijden elkaar niet, dus zijn het twee kruisende lijnen.

Er is geen vlak mogelijk met daarin de lijnen  $m$  en  $n$ .

**Bladzijde 38**

**21a** De plaatsvector  $\overline{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$  is dan een steunvector.

De richtingsvector  $\overline{PQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

De richtingsvector  $\overline{PR} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

**b** Substitueer het punt (2, 3, 3) in het vlak:

$$\begin{cases} 2 = 2 + 2\lambda - 2\mu \dots (1) \\ 3 = 3\mu \dots (2) \\ 3 = 4 - \lambda \dots (3) \end{cases}$$

Uit (2) volgt  $\mu = 1$  en uit (3) volgt  $\lambda = 1$ .

Substitueer  $\lambda = 1$  en  $\mu = 1$  in (1) geeft:  $2 = 2 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1$ , dat klopt.

Substitueer het punt (4, 6, 1) in het vlak:

$$\begin{cases} 4 = 2 + 2\lambda - 2\mu \dots (1) \\ 6 = 3\mu \dots (2) \\ 1 = 4 - \lambda \dots (3) \end{cases}$$

Uit (2) volgt  $\mu = 2$  en uit (3) volgt  $\lambda = 3$

Substitueer  $\lambda = 3$  en  $\mu = 2$  in (1) geeft:  $4 = 2 + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2$ , dat klopt.

$\lambda = 3$  en  $\mu = 2$  horen bij het punt (4, 6, 1).

**c** Als het vlak  $V$  de  $x$ -as snijdt dan is  $y = 0$  en  $z = 0$ .

Substitueer  $y = 0$  en  $z = 0$  in  $V$ :  $\begin{cases} x = 2 + 2\lambda - 2\mu \dots (1) \\ 0 = 3\mu \dots (2) \\ 0 = 4 - \lambda \dots (3) \end{cases}$

Uit (2) volgt  $\mu = 0$  en uit (3) volgt  $\lambda = 4$

Substitueer  $\lambda = 4$  en  $\mu = 0$  in (1) geeft:  $x = 2 + 2 \cdot 4 - 2 \cdot 0 = 10$

Dus het vlak  $V$  snijdt de  $x$ -as in het punt (10, 0, 0).

Als het vlak  $V$  de  $y$ -as snijdt dan is  $x = 0$  en  $z = 0$ .

Substitueer  $x = 0$  en  $z = 0$  in  $V$ :  $\begin{cases} 0 = 2 + 2\lambda - 2\mu \dots (1) \\ y = 3\mu \dots (2) \\ 0 = 4 - \lambda \dots (3) \end{cases}$

Uit (3) volgt  $\lambda = 4$ .

Substitueer  $\lambda = 4$  in (1) geeft:  $\mu = 5$ .

Substitueer  $\mu = 5$  in (2) geeft  $y = 15$

Dus het vlak  $V$  snijdt de  $y$ -as in (0, 15, 0).

Als het vlak  $V$  de  $z$ -as snijdt dan is  $x = 0$  en  $y = 0$ .

Substitueer  $x = 0$  en  $y = 0$  in  $V$  geeft: 
$$\begin{cases} 0 = 2 + 2\lambda - 2\mu \cdots (1) \\ 0 = 3\mu \cdots \cdots \cdots (2) \\ z = 4 - \lambda \cdots \cdots \cdots (3) \end{cases}$$

Uit (2) volgt  $\mu = 0$ .

Substitueer  $\mu = 0$  in (1) geeft:  $\lambda = -1$ .

Substitueer  $\lambda = -1$  in (3) geeft  $z = 5$ .

Dus het vlak  $V$  snijdt de  $z$ -as in  $(0, 0, 5)$ .

**d** Het vlak snijdt de assen in  $(10, 0, 0)$ ,  $(0, 15, 0)$  en  $(0, 0, 5)$ .

**e** Substitueer  $(2, 3, 3)$  in de vergelijking  $\frac{x}{10} + \frac{y}{15} + \frac{z}{5} = 1$ :

$$\frac{2}{10} + \frac{3}{15} + \frac{3}{5} = 1, \text{ dat klopt. Het punt ligt in vlak } V.$$

Substitueer  $(4, 6, 1)$  in de vergelijking  $\frac{x}{10} + \frac{y}{15} + \frac{z}{5} = 1$ :

$$\frac{4}{10} + \frac{6}{15} + \frac{1}{5} = 1, \text{ dat klopt. Het punt ligt in vlak } V.$$

**f** Gegeven een vergelijking van vlak  $V$ :  $\frac{x}{10} + \frac{y}{15} + \frac{z}{5} = 1$

Links en rechts vermenigvuldigen met 30 geeft:  $3x + 2y + 6z = 30$ .

**22a** Het vlak  $W$  snijdt de assen, dus de vergelijking van vlak  $W$  wordt:

$$\frac{x}{7} + \frac{y}{2} - z = 1.$$

Links en rechts vermenigvuldigen met 14 geeft:  $2x + 7y - 14z = 14$

**b** Substitueer  $P(2, t, 5)$  in vlak  $W$  geeft:

$$2 \cdot 2 + 7 \cdot t - 14 \cdot 5 = 14 \Rightarrow 7t = 80 \Rightarrow t = \frac{80}{7} = 11 \frac{3}{7}$$

De coördinaten van  $P$  zijn  $(2, 11 \frac{3}{7}, 5)$ .

**Bladzijde 39**

**23a** Substitueer  $\lambda = -1$  en  $\mu = \frac{1}{2}$  in vlak  $V$  geeft:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Omdat  $y = 0$  en  $z = 0$  volgt hieruit dat het vlak  $V$  de  $x$ -as snijdt.

**b**  $(\frac{1}{2}, 0, 0)$

**c** Een snijpunt met de  $y$ -as betekent dat  $x = 0$  en  $z = 0$ .

Substitueer  $(0, y, 0)$  in de vectorvoorstelling geeft:

$$\begin{cases} 0 = 1 - \mu \cdots (1) \\ y = \lambda + 2\mu \cdots (2) \\ 0 = 1 + \lambda \cdots (3) \end{cases}$$

Uit (1) volgt  $\mu = 1$  en uit (3) volgt  $\lambda = -1$ .

Substitueer  $\lambda = -1$  en  $\mu = 1$  in (2) geeft:  $y = -1 + 2 = 1$ .

De coördinaten van het snijpunt met de  $y$ -as zijn  $(0, 1, 0)$ .

Een snijpunt met de  $z$ -as betekent dat  $x = 0$  en  $y = 0$ .

Substitueer het punt  $(0, 0, z)$  in de vectorvoorstelling geeft:

$$\begin{cases} 0 = 1 - \mu \cdots (1) \\ 0 = \lambda + 2\mu \cdots (2) \\ z = 1 + \lambda \cdots (3) \end{cases}$$

Uit (1) volgt  $\mu = 1$ . Substitueer  $\mu = 1$  in (2) geeft:  $\lambda = 2$ .

Substitueer  $\lambda = 2$  in (3) geeft:  $z = 3$

De coördinaten van het snijpunt met de  $z$ -as zijn  $(0, 0, 3)$ .

- d** De snijpunten met de assen zijn  $(\frac{1}{2}, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  en  $(0, 0, 3)$

Een vergelijking is  $\frac{x}{\frac{1}{2}} + y + \frac{z}{3} = 1$ . Links en rechts vermenigvuldigen met drie geeft:

$$6x + 3y + z = 3.$$

- e** Substitueer  $(5, 5, 14)$  in de vergelijking. Dan  $6 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 14 = 3$ , dat klopt niet. Het punt  $(5, 5, 14)$  ligt niet in het vlak  $V$ .

- 24a**  $x = 6$  hoort bij het vlak  $ABFE$ .

- b**  $z = 3$  is de vergelijking van het bovenvlak.

- c**  $y = 0$  hoort bij het vlak  $OAED$ .

- d** Het vlak  $BCG$  snijdt de  $y$ -as, dus de vergelijking van het vlak  $BCG$  is  $y = 10$ .

- e** De snijpunten met de  $x$ -as en  $y$ -as zijn  $(6, 0, 0)$  en  $(0, 10, 0)$ .

- f** Het vlak snijdt de  $x$ -as en  $y$ -as.

Kies  $y = 0$  dan  $\frac{x}{6} + \frac{0}{10} = 1$  en dit geeft:  $x = 6$ . De coördinaten zijn  $(6, 0, 0)$ .

Kies  $x = 0$  dan  $\frac{0}{6} + \frac{y}{10} = 1$  en dit geeft:  $y = 10$ . De coördinaten zijn  $(0, 10, 0)$ .

- g** De vergelijking links en rechts vermenigvuldigen met 30 geeft:  $5x + 3y = 30$ .

- 25a** Kies  $y = 0$  dan  $3 \cdot 0 + 2z = 12$  en dit geeft:  $z = 6$ . De coördinaten zijn  $(0, 0, 6)$ .

Kies  $z = 0$  dan  $3y + 2 \cdot 0 = 12$  en dit geeft:  $y = 4$ . De coördinaten zijn  $(0, 4, 0)$ .

- b** Het vlak loopt evenwijdig met de  $x$ -as. In de vergelijking komt er geen  $x$  voor.

- c** Een vectorvoorstelling van  $W$  is:  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

- d** Het vlak  $U$  is evenwijdig met de  $y$ -as.

- e** Een vectorvoorstelling van  $U$  is:  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

- 26a** Het vlak is evenwijdig aan de  $z$ -as en heeft snijpunten met de  $x$ -as  $(4, 0, 0)$  en de  $y$ -as  $(0, 3, 0)$ .

De vergelijking is te schrijven als  $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ .

- b** Substitueer het punt  $(4, 0, 1)$  in de vergelijking:  $\frac{4}{4} + \frac{0}{3} = 1$ , dat klopt.

Substitueer het punt  $(4, 0, 2)$  in de vergelijking:  $\frac{4}{4} + \frac{0}{3} = 1$ , dat klopt.

Substitueer het punt  $(0, 3, 1)$  in de vergelijking:  $\frac{0}{4} + \frac{3}{3} = 1$ , dat klopt.

Substitueer het punt  $(0, 3, 2)$  in de vergelijking:  $\frac{0}{4} + \frac{3}{3} = 1$ , dat klopt.

- c** Nee, want  $l$  ligt in het  $x, y$ -vlak en  $z = 0$ .

- d  $(4, 0, 3)$ ,  $(4, 0, 4)$ ,  $(0, 3, 3)$  en  $(0, 3, 4)$ .  
 e De punten liggen twee aan twee boven elkaar.

**Bladzijde 40**

- 27a**  $H$  en  $F$  liggen aan verschillende kanten van  $V$
- b**  $\lambda = 0$  geeft  $H$ .  
 $\lambda = 3$  geeft  $F$ .
- c** Substitueer  $(3 + \lambda, 2\lambda, 2\lambda)$  in de vergelijking  $2x + 4y + z = 12$  geeft:  
 $2(3 + \lambda) + 4 \cdot 2\lambda + 2\lambda = 12 \Rightarrow 6 + 2\lambda + 8\lambda + 2\lambda = 12$ .
- d**  $6 + 2\lambda + 8\lambda + 2\lambda = 12 \Rightarrow 12\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$   
 De coördinaten van het snijpunt zijn  $(3\frac{1}{2}, 1, 1)$ .
- 28** Kies het punt  $(-4 + \mu, 3\mu, 5 - 2\mu)$  op lijn  $m$  en substitueer het in de vergelijking  
 $4x - y + 2z = 15$  Dit geeft:  $4(-4 + \mu) - 3\mu + 2(5 - 2\mu) = 15$   
 $-16 + 4\mu - 3\mu + 10 - 4\mu = 15 \Rightarrow -3\mu = 21 \Rightarrow \mu = -7$   
 De coördinaten zijn  $(-11, -21, 19)$ .

**Bladzijde 41**

- 29a** Kies het punt  $(1 - 3\lambda, 2, 4 + 4\lambda)$  op lijn  $l$  en substitueer in de vergelijking  
 $3x - 2y + 2z = 12$  Dit geeft:  $3(1 - 3\lambda) - 4 + 2(4 + 4\lambda) = 12$   
 $3 - 9\lambda - 4 + 8 + 8\lambda = 12 \Rightarrow -\lambda = 5 \Rightarrow \lambda = -5$   
 De coördinaten zijn  $(16, 2, -16)$ .
- b** Kies het punt  $(-3 + 2\mu, \mu, -2\mu)$  op lijn  $m$  en substitueer in de vergelijking  
 $3x - 2y + 2z = 12$  Dit geeft:  $3(-3 + 2\mu) - 2\mu + 2 \cdot -2\mu = 12$   
 $-9 + 6\mu - 2\mu - 4\mu = 12 \Rightarrow 0 = 21$ , dat klopt niet.  
 Dus lijn  $m$  en vlak  $W$  hebben geen snijpunten.
- c** Kies het punt  $(2 + 2v, v, 3 - 2v)$  op lijn  $n$  en substitueer het in de vergelijking  
 $3x - 2y + 2z = 12$  Dit geeft:  $3(2 + 2v) - 2v + 2(3 - 2v) = 12$   
 $6 + 6v - 2v + 6 - 4v = 12 \Rightarrow 12 = 12$ , dat klopt.  
 Dus lijn  $n$  en vlak  $W$  hebben oneindig veel snijpunten.
- d** De lijn loopt evenwijdig aan het vlak, omdat lijn  $m$  en vlak  $W$  geen snijpunten hebben.  
 De lijn ligt in het vlak, omdat lijn  $n$  en vlak  $W$  oneindig veel snijpunten hebben.
- 30a** Substitueer het punt  $A$  in de vergelijking  $2x - 2y + 3z = 12$  Dit geeft  $2 \cdot 6 - 0 + 0 = 12$ , dat klopt.  
 Substitueer het punt  $D$  in de vergelijking  $2x - 2y + 3z = 12$  Dit geeft  $0 + 0 + 3 \cdot 4 = 12$ , dat klopt.  
 Substitueer het punt  $F$  in de vergelijking  $2x - 2y + 3z = 12$  Dit geeft  $2 \cdot 6 - 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 = 12$ , dat klopt.

b De steunvector is  $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$  en de richtingsvector van  $\overrightarrow{CE} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$

Een vectorvoorstelling van de lijn  $CE$  is  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$

- c Kies het punt  $(6\lambda, 6 - 6\lambda, 4\lambda)$  op lijn  $CE$  en substitueer in de vergelijking  $2x - 2y + 3z = 12$ . Dit geeft:  $12\lambda - 2(6 - 6\lambda) + 12\lambda = 12 \Rightarrow 12\lambda - 12 + 12\lambda + 12\lambda = 12 \Rightarrow 36\lambda = 24 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}$ .  
De coördinaten van het snijpunt zijn  $(4, 2, 2\frac{2}{3})$ .

d De steunvector is  $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$  en de richtingsvector van  $\overrightarrow{CG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

Een vectorvoorstelling van lijn  $CG$  is  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

Kies het punt  $(0, 6, 4\lambda)$  op lijn  $CG$  en substitueer in de vergelijking  $2x - 2y + 3z = 12$

Dit geeft:  $2 \cdot 0 - 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4\lambda = 12 \Rightarrow 12\lambda = 24 \Rightarrow \lambda = 2$

De coördinaten van het snijpunt zijn  $(0, 6, 8)$ .

e De steunvector is  $\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$  en de richtingsvector van  $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Een vectorvoorstelling van lijn  $PQ$  is:  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Kies het punt  $(6 - 6\lambda, 6 - 3\lambda, 2 + 2\lambda)$  op lijn  $PQ$  en substitueer in de vergelijking

$2x - 2y + 3z = 12$ . Dit geeft:  $2(6 - 6\lambda) - 2(6 - 3\lambda) + 3(2 + 2\lambda) = 12$

$12 - 12\lambda - 12 + 6\lambda + 6 + 6\lambda = 12 \Rightarrow 6 = 12$ , dat klopt niet.

Er zijn geen snijpunten, dus lijn  $PQ$  loopt evenwijdig aan het vlak  $ADF$ .

- 31a Voor een snijpunt met de  $x$ -as geldt  $y = 0$  en  $z = 0$ .

Substitueer  $(x, 0, 0)$  in de vectorvoorstelling: 
$$\begin{cases} x = 5 + v \dots (1) \\ 0 = 2\mu \dots (2) \\ 0 = 1 + \mu + v \dots (3) \end{cases}$$

Uit (2) volgt  $\mu = 0$ . Substitueer  $\mu = 0$  in (3) geeft:  $v = -1$

Substitueer  $v = -1$  in (1) geeft:  $x = 4$ .

De coördinaten zijn  $(4, 0, 0)$ .

Voor een snijpunt met de  $y$ -as geldt  $x = 0$  en  $z = 0$ .

Substitueer  $(0, y, 0)$  in de vectorvoorstelling: 
$$\begin{cases} 0 = 5 + v \dots (1) \\ y = 2\mu \dots (2) \\ 0 = 1 + \mu + v \dots (3) \end{cases}$$

Uit (1) volgt  $v = -5$  en substitueer  $v = -5$  in (3) geeft:  $\mu = 4$

Substitueer  $\mu = 4$  in (2) geeft:  $y = 8$

De coördinaten zijn  $(0, 8, 0)$ .

Voor een snijpunt met de  $z$ -as geldt  $x = 0$  en  $y = 0$ .

Substitueer  $(0, 0, z)$  in de vectorvoorstelling: 
$$\begin{cases} 0 = 5 + v \dots\dots (1) \\ 0 = 2\mu \dots\dots\dots (2) \\ z = 1 + \mu + v \dots\dots (3) \end{cases}$$

Uit (1) volgt  $v = -5$  en uit (2) volgt  $\mu = 0$   
 Substitueer  $\mu = 0$  en  $v = -5$  in (3) geeft:  $z = -4$

De coördinaten zijn  $(0, 0, -4)$ .

**b** Een vergelijking is  $\frac{x}{4} + \frac{y}{8} + \frac{z}{-4} = 1$ . Links en rechts vermenigvuldigen met acht geeft:  
 $2x + y - 2z = 8$ .

**c** Kies het punt  $(-1 - 3\lambda, 2 + \lambda, 3 + 2\lambda)$  op lijn  $l$  en substitueer in de vergelijking  
 $2x + y - 2z = 8$  Dit geeft:  $2(-1 - 3\lambda) + 2 + \lambda - 2(3 + 2\lambda) = 8$   
 $-2 - 6\lambda + 2 + \lambda - 6 - 4\lambda = 8 \Rightarrow -9\lambda = 14 \Rightarrow \lambda = \frac{14}{-9}$

Dus de lijn snijdt het vlak.

**Bladzijde 42**

**32a** De richtingsvectoren van beide lijnen zijn ook richtingsvectoren van  $W$ .  
 Ook zijn de steunvectoren dezelfde.

**b** Kies het punt  $(1, 3 - \lambda, 2 + \lambda)$  en vul dit in de vergelijking van  $V$  in:  
 $-2 + 9 - 3\lambda - 2 - \lambda = 13 \Rightarrow -4\lambda = 8 \Rightarrow \lambda = -2$ .  
 De coördinaten zijn  $(1, 5, 0)$ .

Kies het punt  $(1 + \mu, 3, 2 + 2\mu)$  op de lijn en substitueer in de vergelijking  
 $-2x + 3y - z = 13$   
 $-2 - 2\mu + 9 - 2 - 2\mu = 13 \Rightarrow -4\mu = 8 \Rightarrow \mu = -2$   
 De coördinaten zijn  $(-1, 3, -2)$ .

**c** De snijlijn gaat door de punten die je bij de vorige opdracht hebt gevonden!

Dus is een vectorvoorstelling van de snijlijn: 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -1 - 1 \\ 3 - 5 \\ -2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

**33** Kies het punt  $(2 + \lambda, -\lambda, 1 + 2\lambda)$  op de lijn en substitueer in de vergelijking  
 $2x - 3y + z = 12: 2(2 + \lambda) + 3\lambda + 1 + 2\lambda = 12 \Rightarrow 4 + 2\lambda + 3\lambda + 1 + 2\lambda = 12 \Rightarrow \lambda = 1$ . De  
 coördinaten zijn  $(3, -1, 3)$ .

Kies het punt  $(2, \mu, 1 + 2\mu)$  op de lijn en substitueer in de vergelijking  
 $2x - 3y + z = 12: 4 - 3\mu + 1 + 2\mu = 12 \Rightarrow \mu = -7$ .  
 De coördinaten zijn  $(2, -7, -13)$ .

**34a** In vlak  $W$  liggen de lijnen  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Kies het punt  $(2 + \lambda, 2\lambda, -1)$  op de lijn en substitueer in de vergelijking  
 $-2x + 3y + z = 7: -2(2 + \lambda) + 6\lambda - 1 = 7 \Rightarrow -4 - 2\lambda + 6\lambda - 1 = 7 \Rightarrow 4\lambda = 12$   
 $\lambda = 3$ . De coördinaten zijn  $(5, 6, -1)$ .

Kies het punt  $(2, \mu, -1 - \mu)$  op de lijn en substitueer in de vergelijking

$$-2x + 3y + z = 7$$

Dan is  $-4 + 3\mu - 1 - \mu = 7 \Rightarrow 2\mu = 12 \Rightarrow \mu = 6$ .

De coördinaten zijn  $(2, 6, -7)$ .

Een vectorvoorstelling van de snijlijn is 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2-5 \\ 6-6 \\ -7-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

- b** Kies het punt  $(2 + \lambda, 2\lambda, -1)$  op de lijn en substitueer in de vergelijking  $x + 2y - z = 18$ :

De coördinaten zijn  $(5, 6, -1)$ .

Kies het punt  $(2, \mu, -1 - \mu)$  op de lijn en substitueer in de vergelijking  $x + 2y - z = 18$ :

$$2 + 2\mu + 1 + \mu = 18 \Rightarrow 3\mu = 15 \Rightarrow \mu = 5.$$

De coördinaten zijn  $(2, 5, -6)$ . Een vectorvoorstelling van de snijlijn is

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2-5 \\ 5-6 \\ -6-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

- c** Kies het punt  $(5 - 3v, 6, -1 - 6v)$  op de snijlijn en substitueer in de vergelijking  $-2x + 3y + z = 7$
- $$-2(5 - 3v) + 3 \cdot 6 - 1 - 6v = 7 \Rightarrow -10 + 6v + 18 - 1 - 6v = 7 \Rightarrow 7 = 7, \text{ dat klopt.}$$
- De lijnen liggen in één vlak.

### Bladzijde 43

- 35a** Een vergelijking is  $\frac{x}{6} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$   
 Links en rechts vermenigvuldigen met 12 geeft:  $2x + 6y + 3z = 12$ .
- b** Een vergelijking is  $\frac{x}{3} + y + \frac{z}{2} = 1$   
 Links en rechts vermenigvuldigen met zes geeft:  $2x + 6y + 3z = 6$ .
- c** De vlakken hebben geen gemeenschappelijke punten.

- 36a** Beide vlakken hebben dezelfde richtingsvector.
- b** Substitueer het punt  $(2, 2, 5)$  in vlak  $V: 2 = 4 - 2$ , dat klopt.  
 Het punt ligt ook in vlak  $V$ .
- c** Het punt  $(2, 2, 5)$  ligt in beide vlakken.

- 37a** Het punt  $Q(0, 0, 2)$  is een snijpunt van de vlakken  $PQG$  en  $BRQ$ .

Een vectorvoorstelling van de snijlijn is 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- b** De vectorvoorstelling van vlak  $AKL$  is 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De vectorvoorstelling van vlak  $PQG$  is 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Onderzoek of de twee vlakken samenvallen of evenwijdig zijn.

Substitueer  $(4, 0, 0)$  van vlak  $AKL$  in de vectorvoorstelling van vlak  $PQG$ :

$$\begin{cases} 4 = 2 - 2\alpha - 2\beta \dots (1) \\ 0 = 6 - 6\alpha \dots \dots \dots (2) \\ 0 = 3 - \alpha + \beta \dots \dots \dots (3) \end{cases}$$

Uit (2) volgt  $\alpha = 1$  en substitueer  $\alpha = 1$  in (3) geeft:  $\beta = -2$ .

Substitueer  $\alpha = 1$  en  $\beta = -2$  in (1) geeft:  $4 = 2 - 2 + 4$ , dat klopt.

Dus beide vlakken vallen samen.

c Een vectorvoorstelling van  $BRQ$  is  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 4-0 \\ 6-6 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

Een vectorvoorstelling van  $CGF$  is  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

In vlak  $BRQ$  liggen de lijnen:  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

Kies het punt  $(0, 6\lambda, 2)$  op de lijn en substitueer in de vectorvoorstelling van vlak

$$CGF: \begin{cases} 0 = 4\beta \dots \dots \dots (1) \\ 6\lambda = 6 \dots \dots \dots (2) \\ 2 = 4\alpha + 4\beta \dots \dots \dots (3) \end{cases}$$

Uit (1) volgt  $\beta = 0$  en uit (2) volgt  $\lambda = 1$

Substitueer  $\beta = 0$  in (3) geeft  $\alpha = \frac{1}{2}$

De coördinaten zijn  $(0, 6, 2)$

Kies het punt  $(4\mu, 6\mu, 2 - 2\mu)$  op de lijn en substitueer in de vectorvoorstelling van vlak  $CGF$ :

$$\begin{cases} 4\mu = 4\beta \dots \dots \dots (1) \\ 6\mu = 6 \dots \dots \dots (2) \\ 2 - 2\mu = 4\alpha + 4\beta \dots \dots \dots (3) \end{cases}$$

Uit (2) volgt  $\mu = 1$  en substitueer  $\mu = 1$  in (1) geeft  $\beta = 1$

Substitueer  $\mu = 1$  en  $\beta = 1$  in (3) geeft:  $\alpha = -1$

De coördinaten zijn  $(4, 6, 0)$

De snijpunten zijn  $(0, 6, 2)$  en  $(4, 6, 0)$ .

Een vectorvoorstelling van de snijlijn is  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 4-0 \\ 6-6 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

**Bladzijde 44**

38a Een vectorvoorstelling van lijn  $KN$  is  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

b  $P$  ligt in het midden van lijnstuk  $KM$ , dus  $P(3, 4)$ .

Een vergelijking van  $LP$  is  $y = -\frac{1}{6}x + 4\frac{1}{2}$ .

Kies het punt  $(1 + 3\lambda, 1 + 2\lambda)$  op lijn  $KN$  en substitueer in de vergelijking van  $LP$ :

$$1 + 2\lambda = -\frac{1}{6}(1 + 3\lambda) + 4\frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{4}{3}$$

Het punt  $S(5, 3\frac{2}{3})$  is het snijpunt van  $KN$  en  $LP$ .

- c**  $T$  ligt in het midden van lijnstuk  $KL$ , dus  $T(5, 2)$ .

Een vergelijking van lijn  $MT$  is  $x = 5$ .

Het punt  $S(5, 3\frac{2}{3})$  ligt op de lijn  $x = 5$ , dus de zwaartelijnen snijden elkaar in één punt.

- 39a** De coördinaten van de punten zijn:

$$P(2, 4, 0); Q(0, 4, 2); R(0, 2, 4); S(2, 0, 4); T(4, 0, 2) \text{ en } U(4, 2, 0).$$

- b** Een vergelijking is:  $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1 \Rightarrow x + y + z = 4$ .

- c** De lijn snijdt de  $z$ -as, dus  $x = 0$  en  $y = 0$ .

Substitueer  $x = 0$  en  $y = 0$  in de vectorvoorstelling  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

$$\text{Dit geeft: } \begin{cases} 0 = 0 \dots \dots \dots (1) \\ 0 = 2 + 2\lambda \dots (2) \\ z = 4 - 2\lambda \dots (3) \end{cases}$$

Uit (2) volgt  $\lambda = -1$  en substitueer  $\lambda = -1$  in (3) geeft  $z = 6$

Dus de coördinaten van het snijpunt met de  $z$ -as zijn  $(0, 0, 6)$ .

- d** Een vectorvoorstelling van het vlak  $PQR$  is  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

In vlak  $PQR$  liggen de lijnen  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$PQR$  snijdt de  $x$ -as en  $y$ -as in het vlak  $z = 0$ .

Substitueer  $(x, y, 0)$  in de vectorvoorstelling van de lijn

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \dots (1) \\ y = 4 \dots \dots (2) \\ 0 = -\lambda \dots (3) \end{cases}$$

Uit (3) volgt  $\lambda = 0$  en substitueer  $\lambda = 0$  in (1) geeft:  $x = 2$ .

Dus de coördinaten zijn  $(2, 4, 0)$ .

- e** Een vergelijking is:  $\frac{x}{6} + \frac{y}{6} + \frac{z}{6} = 1$  of  $x + y + z = 6$

- f** Een vergelijking is:  $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1$  of  $x + y + z = 4$

Beide vergelijkingen zijn van de vorm:  $x + y + z = \text{constant}$ .

- 40a** De richtingsvectoren  $\overline{HB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$  en  $\overline{JK} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ .

De richtingsvectoren hebben niet dezelfde of tegengestelde richting.

Dus de lijnen lopen niet evenwijdig.

- b** Omdat de lijnen  $HB$  en  $EC$  allebei in het vlak  $BCDE$  liggen en niet evenwijdig zijn, moeten ze elkaar snijden.

c Een vectorvoorstelling van lijn  $HB$  is 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Een vectorvoorstelling van lijn  $EC$  is 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Kies het punt  $(4 + 4\lambda, 5\lambda, 8 - 8\lambda)$  op lijn  $HB$  en substitueer het in de vectorvoorstelling van lijn  $EC$ :

$$\begin{cases} 4 + 4\lambda = 8 - 8\mu \dots (1) \\ 5\lambda = 5\mu \dots \dots \dots (2) \\ 8 - 8\lambda = 8 - 8\mu \dots (3) \end{cases}$$

De coördinaten zijn  $(5\frac{1}{3}, 1\frac{2}{3}, 5\frac{1}{3})$ .

d 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$$

e De uitkomst is nul, dus bij dit vlak kun je geen vergelijking geven in de vorm

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1 \text{ (dit vlak gaat niet door de oorsprong).}$$

**Bladzijde 45**

41 Een vergelijking van het vlak  $ABC$  door de punten  $A(20, 0, 0)$ ;  $B(0, 15, 0)$  en  $C(0, 0, 10)$  is:  $\frac{x}{20} + \frac{y}{15} + \frac{z}{10} = 1 \Rightarrow 3x + 4y + 6z = 60$

Een vectorvoorstelling van vlak  $DEF$  is: 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix}$$

In vlak  $DEF$  liggen de lijnen  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix}$

De snijpunten met vlak  $ABC$  zijn:

$$3(8 - 8\lambda) + 4 \cdot 12\lambda + 6 \cdot 0 = 60 \Rightarrow 24 - 24\lambda + 48\lambda = 60 \Rightarrow \lambda = 1\frac{1}{2}$$

Substitutie in de lijn geeft:  $(-4, 18, 0)$ .

$$3(8 - 8\mu) + 4 \cdot 0 + 6 \cdot 16\mu = 60 \Rightarrow 24 - 24\mu + 96\mu = 60 \Rightarrow \mu = \frac{1}{2}$$

Substitutie in de lijn geeft:  $(4, 0, 8)$ .

Een vectorvoorstelling van de snijlijn is: 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -8 \\ 18 \\ -8 \end{pmatrix}$$

42a Een vergelijking van het vlak door de punten  $(10, 0, 0)$ ;  $(0, 8, 0)$  en  $(0, 0, -4)$  is:

$$\frac{x}{10} + \frac{y}{8} + \frac{z}{-4} = 1 \Rightarrow 4x + 5y - 10z = 40$$

- b Een vectorvoorstelling van het vlak is:  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$
- c Een vlak door de oorsprong evenwijdig aan het vlak is  $4x + 5y - 10z = 0$

43a  $\lambda + \lambda = 4 \Rightarrow \lambda = 2$  dus  $|\overline{BT}| = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2 + 6^2} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$

- b Gegeven  $A(6, 0, 0)$ ;  $B(6, 6, 0)$  en  $T(0, 0, 6)$ .

Een vergelijking van vlak  $ABT$  is:  $\frac{x}{6} + \frac{z}{6} = 1$ . Links en rechts vermenigvuldigen met zes geeft:  $x + z = 6$ .

Gegeven  $B(6, 6, 0)$ ;  $C(0, 6, 0)$  en  $T(0, 0, 6)$ .

Een vergelijking van vlak  $BCT$  is:  $\frac{y}{6} + \frac{z}{6} = 1$ . Links en rechts vermenigvuldigen met zes geeft:  $y + z = 6$ .

- c Lijnstuk  $BC$  loopt evenwijdig met lijnstuk  $DE$ . De  $y$ -waarde van punt  $E$  is 4, dus de  $y$ -waarde van  $D$  is ook 4. Dus  $D(6, 4, 0)$ .

$\triangle OCT$  is gelijkvormig met  $\triangle OEG$ .

$$\overline{OE} = \frac{2}{3} \overline{OC}, \text{ dus geldt } \overline{OG} = \frac{2}{3} \overline{OT} \Rightarrow \overline{OG} = \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Dus  $G(0, 0, 4)$ .

De coördinaten van  $D$ ,  $E$  en  $G$  zijn:  $(6, 4, 0)$ ;  $(0, 4, 0)$  en  $(0, 0, 4)$ .

Een vergelijking van vlak  $DEG$  is:  $\frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1$ . Links en rechts vermenigvuldigen met vier geeft:  $y + z = 4$ .

- d  $\triangle AOT$  is gelijkvormig met  $\triangle FGT$ .

$$\overline{GT} = \frac{1}{3} \cdot \overline{OG}, \text{ dus geldt } \overline{FG} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AO}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -f_1 = -2 \\ -f_2 = 0 \\ 4 - f_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1 = 2 \\ f_2 = 0 \\ f_3 = 4 \end{cases} \text{ Dus } F(2, 0, 4).$$

- e Midden van ribbe  $BT$  is:  $\frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ , dus  $(3, 3, 3)$ .

Lijn  $l$  gaat door punt  $O$  en het midden van ribbe  $BT$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Substitueer } (\lambda, \lambda, \lambda) \text{ in de vergelijking } y + z = 4:$$

$$\lambda + \lambda = 4 \Rightarrow \lambda = 2.$$

De coördinaten van het snijpunt  $(2, 2, 2)$ .

**Bladzijde 48**

**T-1a** Substitueer de punten  $A, B, C, D$  en  $E$  in de vectorvoorstelling van lijn  $l$ :

$$\begin{cases} 3 = 1 + 2\lambda \\ 2 = 3 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = 1, \text{ dat klopt voor punt } A.$$

$$\begin{cases} -5 = 1 + 2\lambda \\ 0 = 3 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -3 \\ \lambda = 3 \end{cases}, \text{ dat klopt niet voor punt } B.$$

$$\begin{cases} 5 = 1 + 2\lambda \\ 2 = 3 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = 1 \end{cases}, \text{ dat klopt niet voor punt } C.$$

$$\begin{cases} 0 = 1 + 2\lambda \\ 2 = 3 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \\ \lambda = 1 \end{cases}, \text{ dat klopt niet voor punt } D.$$

$$\begin{cases} 9 = 1 + 2\lambda \\ -1 = 3 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = 4, \text{ dat klopt voor punt } E.$$

De punten  $A$  en  $E$  liggen op de lijn.

**b** Kies een punt  $(3, 2)$  op de lijn en substitueer in de vectorvoorstelling:

$$\begin{cases} 3 = a + 2\mu \\ 2 = 0 - \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = -2 \\ a = 7 \end{cases}$$

**c** Kies twee punten op lijn  $l$ :  $(1, 3)$  en  $(3, 2)$ .

$y = -\frac{1}{2}x + n$ , gaat door het punt  $(1, 3)$  geeft  $y = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$ .

**d** Snijpunt met de  $x$ -as, dan is  $y = 0$  geeft:  $0 = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2} \Rightarrow x = 7$ .

Snijpunt met de  $y$ -as, dan is  $x = 0$  geeft:  $y = -\frac{1}{2} \cdot 0 + 3\frac{1}{2} \Rightarrow y = 3\frac{1}{2}$

De vergelijking wordt:  $\frac{x}{7} + \frac{y}{3\frac{1}{2}} = 1$ .

**e** Links en rechts vermenigvuldigen met zeven geeft:  $x + 2y = 7$ .

**T-2a** De richtingsvectoren van lijn  $l$  en  $n$  zijn tegengesteld, dus de lijnen zijn evenwijdig of vallen samen.

**b** De lijnen  $l$  en  $m$  snijden elkaar.

Kies  $(2 + \lambda, \lambda, 3)$  op lijn  $l$  en substitueer in de vectorvoorstelling van lijn  $m$ :

$$\begin{cases} 2 + \lambda = 1 + 2\mu \dots (1) \\ \lambda = \mu \dots \dots \dots (2) \\ 3 = 1 + 2\mu \dots \dots \dots (3) \end{cases}$$

Uit (3) volgt  $\mu = 1$  en substitueer  $\mu = 1$  in (2) geeft:  $\lambda = 1$ .  
 Substitueer  $\lambda = 1$  en  $\mu = 1$  in (1) geeft:  $2 + 1 = 1 + 2$ , dat klopt.  
 Het snijpunt is  $(3, 1, 3)$ .

De lijnen  $m$  en  $n$  snijden elkaar.

Kies  $(1 - v, 1 - v, 3)$  op lijn  $n$  en substitueer in de vectorvoorstelling van lijn  $m$ :

$$\begin{cases} 1 - v = 1 + 2\mu \dots (1) \\ 1 - v = \mu \dots \dots \dots (2) \\ 3 = 1 + 2\mu \dots \dots \dots (3) \end{cases}$$

Uit (3) volgt  $\mu = 1$  en substitueer  $\mu = 1$  in (2) geeft:  $v = 0$ .  
 Substitueer  $\mu = 1$  en  $v = 0$  in (1) geeft:  $1 - 0 = 1 + 2$ , dat klopt niet.

Dus de lijnen  $m$  en  $n$  snijden elkaar niet, maar kruisen elkaar.

c Zie opdracht b, de lijnen  $m$  en  $n$  kruisen elkaar.

**T-3a** Een vectorvoorstelling van het vlak  $HJK$  is 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

b Een vectorvoorstelling van het vlak  $ACI$  is 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c Een vlak dat evenwijdig loopt aan het vlak  $ACI$  door het punt  $J$ , heeft dezelfde richtingsvectoren.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

**T-4a** Een vectorvoorstelling van lijn  $AH$  is 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

De lijn  $AH$  snijdt de  $z$ -as, dus  $x = 0$  en  $y = 0$ .

$$\begin{cases} 0 = 6 - v \dots (1) \\ 0 = 0 \dots \dots (2) \\ z = 2v \dots \dots (3) \end{cases}$$

Uit (1) volgt  $v = 6$  en substitueer  $v = 6$  in (3) geeft:  $z = 12$ .

Dus de lijn  $AH$  snijdt de  $z$ -as in  $(0, 0, 12)$ .

Een vergelijking is  $\frac{x}{6} + \frac{y}{6} + \frac{z}{12} = 1 \Rightarrow 2x + 2y + z = 12$ .

b Een vlak dat evenwijdig loopt aan het vlak  $ACI$  door het punt  $K$ , kan dezelfde richtingsvectoren hebben.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c  $(0, 0, 6)$ ;  $(3, 0, 3)$  en  $(2, 0, 4)$

d Het linkervlak van de kubus.

### Bladzijde 49

**T-5a** Een vectorvoorstelling van de lijn  $DB$  is: 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

b Kies het punt  $(\lambda, \lambda, 8 - \lambda)$  op de lijn  $DB$  en substitueer in de vergelijking

$$x + y + z = 12$$

Dit geeft:  $\lambda + \lambda + 8 - \lambda = 12 \Rightarrow \lambda = 4$ .

De coördinaten zijn  $(4, 4, 4)$ .

c Stel een vectorvoorstelling van de lijn  $AC$ : 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Kies het punt  $(8 - \mu, \mu, 0)$  op lijn  $AC$  en substitueer in de vergelijking  $x + y + z = 12$

Dit geeft:  $8 - \mu + \mu + 0 = 12 \Rightarrow 8 = 12$ , dat klopt niet.

De lijn  $AC$  snijdt niet het vlak  $PQR$ .

De lijn  $AC$  loopt evenwijdig aan het vlak  $PQR$ .

- d** Kies het punt  $(5 + \lambda, 4, 3 - \lambda)$  op de lijn  $l$  en substitueer in de vergelijking  $x + y + z = 12$

Dit geeft:  $5 + \lambda + 4 + 3 - \lambda = 12 \Rightarrow 12 = 12$ , dat klopt.

Dus de lijn  $l$  ligt in het vlak  $PQR$ .

**T-6a** In vlak  $V$  liggen de lijnen: 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kies het punt  $(2, 3 - \lambda, 2 + \lambda)$  op de eerste lijn en substitueer in de vectorvoorstelling van vlak  $W$ :

$$\begin{cases} 2 = 1 + 4v \dots\dots\dots(1) \\ 3 - \lambda = 3 + v - \alpha \dots(2) \\ 2 + \lambda = 2 + v - 2\alpha \dots(3) \end{cases}$$

Uit (1) volgt:  $v = \frac{1}{4}$

Substitueer (3) in (2) geeft:  $-v - 2\alpha = v - \alpha \Rightarrow 2v = 3\alpha$  en  $v = \frac{1}{4}$  geeft:  $\alpha = \frac{1}{6}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3\frac{1}{2} \\ 1\frac{11}{12} \end{pmatrix}. \text{ Op dezelfde manier vind je } (1\frac{4}{5}, 3, 1\frac{4}{5}).$$

De vlakken  $V$  en  $W$  snijden elkaar in de punten  $(2, 3\frac{1}{2}, 1\frac{11}{12})$  en  $(1\frac{4}{5}, 3, 1\frac{4}{5})$ .

Dus de vlakken  $U$  en  $V$  snijden elkaar.

In vlak  $W$  liggen de lijnen: 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Kies het punt  $(1 + 4v, 3 + v, 2 + v)$  en substitueer in de vergelijking van  $U$ .

Dit geeft:  $-1 - 4v + 24 + 8v - 8 - 4v = 20 \Rightarrow 15 = 20$ , dat klopt niet.

Dus de vlakken snijden elkaar niet! En dus zijn de vlakken  $U$  en  $W$  evenwijdig aan elkaar.

- b** De vlakken  $U$  en  $V$  snijden elkaar.

De vectorvoorstelling van een snijlijn is: 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3\frac{1}{2} \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

**T-7a** Een vectorvoorstelling van vlak  $DEM$  is: 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Een vectorvoorstelling van lijn  $AK$  is: 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

In vlak  $DEM$  liggen de lijnen: 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Kies het punt  $(\lambda, 0, 5)$  op de lijn en substitueer in de vectorvoorstelling van lijn  $AK$ :

$$\text{Dit geeft } \begin{cases} \lambda = 6 - 6v \dots (1) \\ 0 = 6v \dots (2) \\ 5 = 5v \dots (3) \end{cases}$$

Uit (3) volgt  $v = 1$  en uit (2) volgt  $v = 0$ . Dus er zijn geen snijpunten met deze lijn.

Kies het punt  $(6\mu, 8\mu, 5 - 5\mu)$  op de lijn en substitueer in de vectorvoorstelling van lijn  $AK$ : Dan geldt:

$$\begin{cases} 6\mu = 6 - 6v \\ 8\mu = 6v \\ 5 - 5\mu = 5v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = 1 - v \dots (1) \\ 4\mu = 3v \dots (2) \\ 1 - \mu = v \dots (3) \end{cases}$$

Substitueer (1) in (2) geeft:  $4 - 4v = 3v \rightarrow v = \frac{4}{7}$

Substitueer  $v = \frac{4}{7}$  in (1) geeft:  $\mu = \frac{3}{7}$

Substitueer  $\mu = \frac{3}{7}$  en  $v = \frac{4}{7}$  in (3) geeft:  $1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$ , dat klopt.

Snijpunt  $S(2\frac{4}{7}, 3\frac{3}{7}, 2\frac{6}{7})$ .

$$\mathbf{b} \quad |\overline{KS}| = \left| \begin{pmatrix} 2\frac{4}{7} \\ 3\frac{3}{7} \\ 2\frac{6}{7} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2\frac{4}{7} \\ -2\frac{4}{7} \\ -2\frac{1}{7} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\left(2\frac{4}{7}\right)^2 + \left(-2\frac{4}{7}\right)^2 + \left(-2\frac{1}{7}\right)^2} \approx 4,22$$

Dus is de afstand  $KS \approx 4,22$

$$\mathbf{c} \quad \text{Een vectorvoorstelling van lijn } KL \text{ is: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{In vlak } DEM \text{ liggen de lijnen: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Kies het punt  $(\lambda, 0, 5)$  op de lijn en substitueer in de vectorvoorstelling van lijn  $KL$ .

$$\text{Dan geldt: } \begin{cases} \lambda = 6v \dots (1) \\ 0 = 6 + 6v \dots (2) \\ 5 = 5 - v \dots (3) \end{cases}$$

Uit (2) volgt  $v = -1$  en uit (3) volgt  $v = 0$ . Dus de lijnen snijden elkaar niet.

Kies het punt  $(6\mu, 8\mu, 5 - 5\mu)$  op de lijn en substitueer in de vectorvoorstelling van lijn  $KL$

$$\text{Dan is } \begin{cases} 6\mu = 6v \dots (1) \\ 8\mu = 6 + 6v \dots (2) \\ 5 - 5\mu = 5 - v \dots (3) \end{cases}$$

Substitueer (1) in (2) geeft:  $8\mu = 6 + 6\mu \Rightarrow \mu = 3$

Substitueer  $\mu = 3$  in (1) geeft:  $v = 3$

Substitueer  $\mu = 3$  en  $v = 3$  in (3) geeft:  $5 - 15 = 5 - 3$ , dat klopt niet.

De lijnen snijden elkaar niet. Dus lijn  $KL$  loopt evenwijdig aan het vlak  $DEM$ .

- d** Een vectorvoorstelling van het vlak door het punt  $L$  evenwijdig aan het vlak  $DEM$  is:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

**T-8** Ze kunnen allebei gelijk hebben!!

In de ruimte is  $x = 7$  de vergelijking van een verticaal vlak evenwijdig aan de  $y$ -as.

Maar in het platte vlak, twee dimensionaal is  $x = 7$  de vergelijking van een verticale lijn.