Hoofdstuk 1 - Hoeken

1.1 Gelijkvormigheid

bladzijde 12

1a $\triangle PQR$ is een vergroting van $\triangle ABC$, dus de driehoeken $\triangle ABC$ en $\triangle PQR$ zijn gelijkvormig.

b Vergrotingsfactor: $\frac{PQ}{AB} = \frac{7}{4}$

c De twee driehoeken zijn een vergroting van elkaar; alle zijden zijn dus met dezelfde factor vergroot. Omdat $PQ = \frac{7}{4} \cdot AB$, is $PR = \frac{7}{4} \cdot AC = \frac{7}{4} \cdot 3 = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$ en is $QR = \frac{7}{4} \cdot BC = \frac{7}{4} \cdot 2 = 3\frac{1}{2}$.

2a De lijnen AB en DE lopen evenwijdig aan elkaar. Daaruit volgt: $\angle A = \angle D$ (F-hoeken) en $\angle B = \angle E$ (F-hoeken). Ook is $\angle C = \angle C$. Dus de overeenkomstige hoeken van $\triangle ABC$ zijn even groot als de hoeken van $\triangle DEC$, waaruit volgt dat $\triangle ABC \sim \triangle ADC$.

b Verhoudingstabel:

$\triangle ABC$	$CA = 9$	CB	CB
$\triangle DEC$	$CD = 6$	CE	DE

Hieruit volgt:

$\frac{CB}{CE} = \frac{9}{6} \Rightarrow CB = \frac{9}{6} \cdot CE = \frac{9}{6} \cdot 8 = 12$

$\frac{AB}{DE} = \frac{9}{6} \Rightarrow DE = \frac{6}{9} \cdot AB = \frac{6}{9} \cdot 13\frac{1}{2} = 9$

c $BE = CB - CE = 12 - 8 = 4$

bladzijde 13

3a Driehoek $\triangle ABC \sim \triangle ADB$ maar ook $\triangle ADC \sim \triangle BDC$. Er zijn dus twee manieren om de lengte van BD te vinden.

Manier 1: gebruik $\triangle ABC \sim \triangle ADB$.

$\triangle ABC$	$AC = 10$	AB	BC
$\triangle ADB$	$AB = 8$	AD	DB

En dus: $\frac{AB}{AD} = \frac{10}{8} \Rightarrow AD = \frac{8}{10} \cdot AB = \frac{8}{10} \cdot 8 = 6{,}4$.

Manier 2: gebruik $\triangle ABC \sim \triangle BCD$.

$\triangle ABC$	$AC = 10$	AB	BC
$\triangle BCD$	$BC = 6$	BD	CD

En dus: $\frac{BC}{CD} = \frac{10}{6} \Rightarrow CD = \frac{6}{10} \cdot BC = \frac{6}{10} \cdot 6 = 3{,}6$ en is $AD = AC - CD = 10 - 3{,}6 = 6{,}4$.

b Met de tabel van manier 1 van a: $\frac{BC}{DB} = \frac{10}{8} \Rightarrow DB = \frac{8}{10} \cdot BC = \frac{8}{10} \cdot 6 = 4{,}8$.

Met de tabel van manier 2 van a: $\frac{AB}{BD} = \frac{10}{6} \Rightarrow DB = \frac{6}{10} \cdot AB = \frac{6}{10} \cdot 8 = 4{,}8$.

c Er geldt $\triangle DEB \sim \triangle ADB$ en dus

$\triangle ADB$	$AB = 8$	AD	BD
$\triangle DEB$	$DB = 4{,}8$	DE	BE

Zo dat : $\frac{AD}{DE} = \frac{8}{4{,}8} \Rightarrow DE = \frac{4{,}8}{8} \cdot AD = \frac{4{,}8}{8} \cdot 6{,}4 = 3{,}84$.

4 Met de tabel van het voorbeeld: $\frac{ED}{AM}=\frac{CD}{DM}=\frac{6}{\sqrt{45}} \Rightarrow ED=\frac{6}{\sqrt{45}}\cdot AM=\frac{6}{\sqrt{45}}\cdot 3\approx 2{,}68$.

Met Pythagoras: $DM^2=AM^2+AD^2=3^2+6^2=45 \Rightarrow DM=\sqrt{45}\approx 6{,}71$.

Omdat $\triangle FDE \sim \triangle ADM$ geldt de verhoudingstabel:

$\triangle FDE$	$ED \approx 2{,}68$	FE	FD
$\triangle ADM$	$DM \approx 6{,}71$	AM	DA

Hieruit volgt: $\frac{FE}{AM}\approx\frac{2{,}68}{6{,}71} \Rightarrow FE\approx\frac{2{,}68}{6{,}71}\cdot AM=\frac{2{,}86}{6{,}71}\cdot 3\approx 1{,}2$.

5a $\triangle ABC \sim \triangle DEC$

$\triangle ABC$	$AB = 25$	$AC = x$	BC
$\triangle DEC$	$DE = 10$	$DC = 42 - x$	EC

Hieruit volgt: $\frac{AC}{DC}=\frac{x}{42-x}=\frac{25}{10}$. En dus is $10x=25(42-x)=-25x+1050$.

Herschrijven tot $35x=1050$ geeft $x=\frac{1050}{35}=30$.

b $AB:DE=\frac{25}{10}=2{,}5$, dus de verhouding tussen de overeenkomstige zijden van $\triangle ABC$ en $\triangle DEC$ is 2,5. Dus de verhouding tussen zijde AC en zijde CD is 2,5.

In andere woorden: voor elk stuk van lengte 1 van CD is er een stuk van lengte 2,5 van AC.

In nog andere woorden: v oor elk stuk van 3,5 hoort 2,5 bij AC en 1 bij CD.

Als je de 42 in stukjes van 3,5 verdeelt en vermenigvuldigt met 2,5 dan krijg je de gezochte lengte: $AC=x=\frac{42}{3{,}5}\cdot 2{,}5=30$.

c Uit $\triangle ABC \sim \triangle DEC \sim \triangle AFD$ volgt:

$\triangle ABC$	$AB = 25$	$BC = 20$	AC
$\triangle DEC$	$DE = 10$	EC	DC
$\triangle AFD$	AF	FD	$AD = 42$

Dus geldt $\frac{BC}{EC}=\frac{25}{10} \Rightarrow EC=\frac{10}{25}\cdot BC=\frac{10}{25}\cdot 20=8$.

En is $BE=BC+EC=20+8=28$. Omdat $BE = FD$ is $FD=28$.

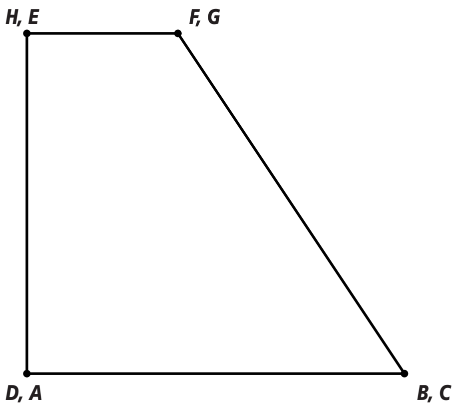
Verder invullen van de tabel geeft:

$\triangle ABC$	$AB = 25$	$BC = 20$	AC
$\triangle DEC$	$DE = 10$	$EC = 8$	DC
$\triangle AFD$	AF	$FD = 28$	$AD = 42$

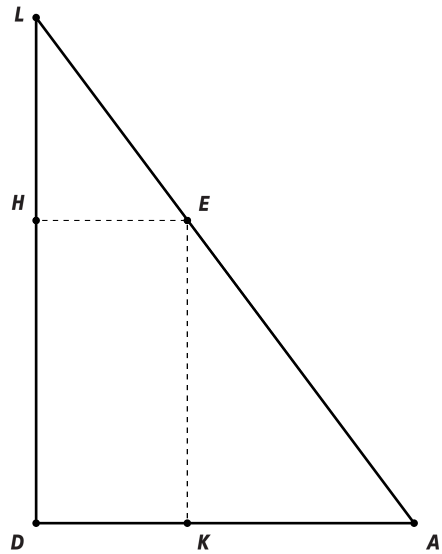
Dan volgt: $\frac{AC}{AD}=\frac{20}{28} \Rightarrow AC=\frac{20}{28}\cdot AD=\frac{20}{28}\cdot 42=30$.

6a $B(10,10,0)$, $E(4,0,8)$ en $G(0,4,8)$

b



c Zijaanzicht voor het afknotten:
HE is de lijn waar de piramide is afgeknot.
Punt K ligt recht onder punt E en punt L is de top van de niet afgeknotte piramide.
In het vooraanzicht geldt $\triangle AKE \sim \triangle ADL$.
Dit geeft als verhoudingstabel:



$\triangle ADL$	$AD = 10$	DL	AL
$\triangle AKE$	$AK = 6$	KE	AE

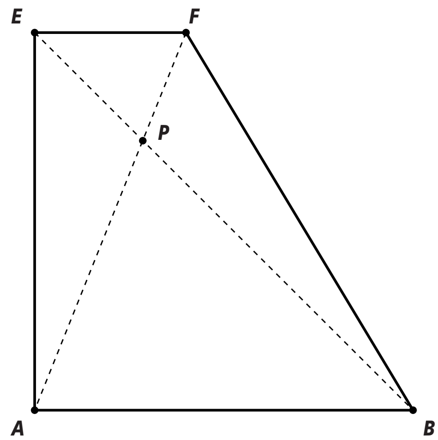
De verhouding tussen de zijden van beide driehoeken is $\frac{10}{6}$.

Dan volgt: $\dfrac{DL}{KE} = \dfrac{10}{6} \Rightarrow DL = \frac{10}{6} \cdot KE = \frac{10}{6} \cdot 8 = 13\frac{1}{3}$.

De oorspronkelijke piramide was $13\frac{1}{3}$ hoog.

d Om $ABFE$ op schaal te kunnen tekenen moeten je de lengte van de zijde AE of de zijde BF weten.
Bereken in driehoek AKE de lengte van AE.
$AE^2 = AK^2 + KE^2 = 6^2 + 8^2 = 100$ en dus $AE = \sqrt{100} = 10$.

e $\triangle ABP \sim \triangle FEP$, want $\angle BEF = \angle ABE$ (Z-hoeken),
$\angle AFE = \angle BAF$ (Z-hoeken) en
$\angle APB = \angle EPF$ (overstaande hoeken).



f

$\triangle ABP$	$AB = 10$	AP	EP
$\triangle FEP$	$FE = 4$	FP	BP

Stel $AP = x$, dan geldt $FP = AF - x$.
Uit de tabel volgt dat de verhouding tussen de zijden van beide driehoeken $\frac{10}{4}$ is.

Dan volgt: $\dfrac{AP}{FP} = \dfrac{x}{AF - x} = \dfrac{10}{4}$.

Dit geeft: $4x = 10(AF - x) = -10x + 10 \cdot AF$.
Herschrijf tot $14x = 10 \cdot AF$ en dus is $x = \frac{10}{14} \cdot AF$.
Met Pythagoras vind je $AF^2 = AE^2 + EF^2 = 10^2 + 4^2 = 116$ en dus $AF = \sqrt{116}$.
Dus $AP = x = \frac{10}{14} \cdot AF = \frac{10}{14} \cdot \sqrt{116} \approx 7{,}7$.

1.2 Cosinusregel

bladzijde 14

7a $\angle B = 180 - \angle A - \angle C = 180 - 40 - 90 = 50°$

$\tan\alpha = \dfrac{BC}{AC} \Rightarrow BC = AC \cdot \tan\alpha = 8 \cdot \tan 40° \approx 6{,}7$

$\cos\alpha = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow AB = \dfrac{AC}{\cos\alpha} = \dfrac{8}{\cos 40°} \approx 10{,}4$

b Uit $\sin\alpha = \dfrac{BC}{AB}$ en $\cos\alpha = \dfrac{AC}{AB}$ volgt $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = \dfrac{BC^2}{AB^2} + \dfrac{AC^2}{AB^2} = \dfrac{BC^2 + AC^2}{AB^2}$

c Volgens Pythagoras geldt: $AC^2 + BC^2 = AB^2$. Delen door AB^2 geeft:
$\dfrac{AC^2 + BC^2}{AB^2} = 1$.

Combineer de resultaten van b en c tot

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = (\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = \dfrac{BC^2 + AC^2}{AB^2} = 1$

8a $\sin(\angle A) = \dfrac{CD}{AC} \Rightarrow CD = AC \cdot \sin(\angle A) = 10 \cdot \sin(80°) \approx 9,85$

b $\cos\angle A = \dfrac{AD}{AC} \Rightarrow AD = AC \cdot \cos\angle A = 10 \cdot \cos 80° \approx 1,74$

$DB = 15 - 1,74 = 13,26$

c Pythagoras: $CB^2 = BD^2 + CD^2 = 13,26^2 + 9,85^2 \approx 272,9$ en dus $CB \approx 16,5$.

9a In $\triangle ADC$ geldt $\sin\alpha = \dfrac{CD}{b} \Rightarrow CD = b \cdot \sin\alpha$.

In $\triangle ADC$ geldt $\cos\alpha = \dfrac{AD}{b} \Rightarrow AD = b \cdot \cos\alpha$.

En dus is $DB = c - AD = c - b \cdot \cos\alpha$.

b Als je in de formule $BC^2 = CD^2 + BD^2$ de bij a gevonden formules met $BC = a$ invult krijg je:

$a^2 = (b \cdot \sin\alpha)^2 + (c - b \cdot \cos\alpha)^2 = b^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha + c^2$.

c Omdat $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ geldt:

$a^2 = b^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha + c^2 = b^2 \underbrace{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}_{=1} - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha + c^2$

$= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$

bladzijde 15

10a De cosinusregel: $a^2 = 19^2 + 15^2 - 2 \cdot 15 \cdot 19 \cdot \cos 39° = 143,03$. Dus $BC = a \approx 11,96$.

b Cosinusregel: $QR = 35^2 + 13^2 - 2 \cdot 35 \cdot 13 \cdot \cos 125° = 1915,95$. Dus $QR \approx 43,77$.

c Cosinusregel. $KM^2 = KL^2 + LM^2 - 2 \cdot KL \cdot LM \cdot \cos\angle L$.

Dus is $2 \cdot KL \cdot LM \cdot \cos\angle L = KL^2 + LM^2 - KM^2$.

En is $\cos\angle L = \dfrac{KL^2 + LM^2 - KM^2}{2 \cdot KL \cdot LM} = \dfrac{15^2 + 8^2 - 12^2}{2 \cdot 15 \cdot 8} \approx 0,60 \Rightarrow$

$\angle L \approx \cos^{-1} 0,60 \approx 52,83°$.

Nogmaals de cosinusregel: $KL^2 = KM^2 + ML^2 - 2 \cdot KM \cdot ML \cdot \cos\angle M$.

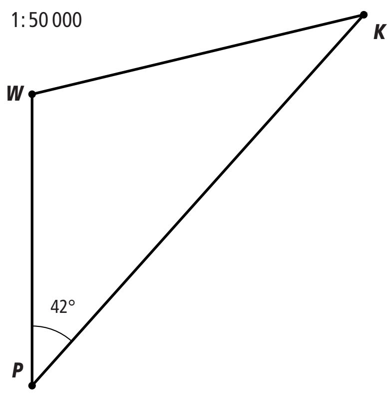
Herschrijven: $\cos\angle M = \dfrac{KM^2 + ML^2 - KL^2}{2 \cdot KM \cdot ML} = \dfrac{12^2 + 8^2 - 15^2}{2 \cdot 12 \cdot 8} \approx -0,089$.

Dus $\angle M \approx \cos^{-1}(-0,089) \approx 95,08°$

11a De schaal is $1:50\ 000$, dus elke kilometer krijgt in de tekening lengte $\frac{1000}{50\ 000} = 0,02 \text{ m} = 2 \text{ cm}$.

Dus PW krijgt lengte $2,75 \cdot 2 = 5,5$ cm en

PK krijgt lengte $4,72 \cdot 2 = 9,44$ cm .



b Cosinusregel:

$WK^2 = PW^2 + PK^2 - 2 \cdot P \cdot K \cdot \cos 42° =$

$2,75^2 + 4,72^2 - 2 \cdot 2,75 \cdot 4,72 \cdot \cos 42° \approx 10,55$.

Dus $WK \approx 3,25$ km . Er is afgerond op 2 decimalen omdat het tweede getal achter de komma de tientallen meters aangeeft.

12a Cosinusregel $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$ herschrijven:

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} = \frac{33^2 + 56^2 - 65^2}{2 \cdot 33 \cdot 56} = 0 .$$

Dus $\gamma = \cos^{-1} 0 = 90°$

b Een rechthoekige driehoek.

c Als $\gamma = 90°$ dan geldt $\cos\gamma = 0$.
De cosinusregel versimpelt dan tot $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot 0 = a^2 + b^2$, de stelling van Pythagoras!

13a In $\triangle ADC$ geldt $\sin\alpha = \frac{CD}{b} \Rightarrow CD = b \cdot \sin\alpha$.
In $\triangle ADC$ geldt $\cos\alpha = \frac{AD}{b} \Rightarrow AD = b \cdot \cos\alpha$.
Ook is $AD = c + BD$ en dus $BD = AD - c = b \cdot \cos\alpha - c$.

b In $BC^2 = BD^2 + CD^2$ voor BD en CD de bij a gevonden formules samen met $BC = a$ invullen geeft: $a^2 = (b \cdot \sin\alpha)^2 + (b \cdot \cos\alpha - c)^2$.

c
$$a^2 = (b \cdot \sin\alpha)^2 + (b \cdot \cos\alpha - c)^2$$
$$a^2 = b^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha + c^2$$
$$= b^2 \underbrace{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}_{=1} - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha + c^2 .$$
$$= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

Dit is de cosinusregel!

1.3 Hoek tussen twee lijnen

bladzijde 16

14a $\triangle ADP$ is een rechthoekige driehoek, dus $AP^2 = AD^2 + DP^2 = 6^2 + 5{,}5^2 = 66{,}25$ en dus $AP = \sqrt{66{,}25} \approx 8{,}14$.
Omdat $ACBD$ een rechthoek is, geldt $AD = BC = 6$. ΔBCP is een rechthoekige driehoek, dus $BP^2 = BC^2 + CP^2 = 6^2 + 2{,}5^2 = 42{,}25$ en dus $BP = \sqrt{42{,}25} \approx 6{,}5$.
Omdat $ACBD$ een rechthoek is, geldt $AB = DC = 8$.
In $\triangle ADC$ geldt $AC^2 = AD^2 + DC^2 = 6^2 + 8^2 = 100$ en dus $AC = 10$.

b AB en CD zijn evenwijdig dus $\angle BAC = \angle ACD$ (Z-hoeken) en $\angle ABP = \angle BPC$ (Z-hoeken).
Dus de driehoeken zijn gelijkvormig.

c Uit opdracht a volgt $AC = AS + SC = 10$ en $BP = BS + SP = 6{,}5$.
Stel $AS = x$ en $SP = y$. Omdat $\triangle ABS \sim \triangle CPS$ geldt:

$\triangle ABS$	$AB = 8$	$AS = x$	$BS = 6{,}5 - y$
$\triangle CPS$	$CP = 2{,}5$	$CS = 10 - x$	$SP = y$

Uit $\frac{AB}{CP} = \frac{x}{10 - x} = \frac{8}{2{,}5}$ volgt $2{,}5x = 8 \cdot (10 - x) = -8x + 80$.
Dus is $10{,}5x = 80$ en is $AS = x = \frac{80}{10{,}5} = 7{,}62$.
Uit de verhoudingstabel volgt ook : $\frac{AB}{CP} = \frac{6{,}5 - y}{y} = \frac{8}{2{,}5}$.
Dit geeft: $8y = 2{,}5 \cdot (6{,}5 - y) = -2{,}5y + 16{,}25$.
Dus is $10{,}5y = 16{,}25$ en is $SP = y = \frac{16{,}25}{10{,}5} \approx 1{,}55$.

d Cosinusregel: $AP^2 = AS^2 + SP^2 - 2 \cdot AS \cdot SP \cdot \cos(\angle ASP)$.
Herschrijven tot: $2 \cdot AS \cdot SP \cdot \cos(\angle ASP) = AS^2 + SP^2 - AP^2$.
$\cos(\angle ASP) = \dfrac{AS^2 + SP^2 - AP^2}{2 \cdot AS \cdot SP} = \dfrac{7{,}62^2 + 1{,}55^2 - 8{,}14^2}{2 \cdot 7{,}62 \cdot 1{,}55} \approx -0{,}25$
Dus $\angle ASP = \cos^{-1}(-0{,}25) \approx 104°$.

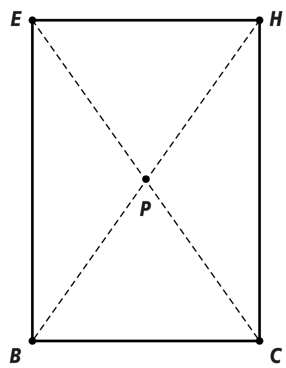
e $\angle BSC = \angle ASP = 104°$ (overstaande hoeken)
Ook is $\angle CSP = \angle ASB$ (overstaande hoeken)
Omdat $\angle BSA + \angle ASP = 180° \Rightarrow \angle BSA = 180° - \angle ASP = 76°$ en is $\angle CSP = 76°$.

15a Beide lijnen liggen in het vlak $ABFE$.
Omdat $\tan(\angle AEB) = \dfrac{AB}{AE}$ is $\angle AEB = \tan^{-1}\left(\dfrac{AB}{AE}\right) = \tan^{-1}\left(\dfrac{6}{6}\right) = 45°$.

b Beide lijnen liggen in het vlak BEG. De drie zijden van $\triangle BEG$ zijn allen even lang, dus $\triangle BEG$ is een gelijkzijdige driehoek en elke hoek is 60°.

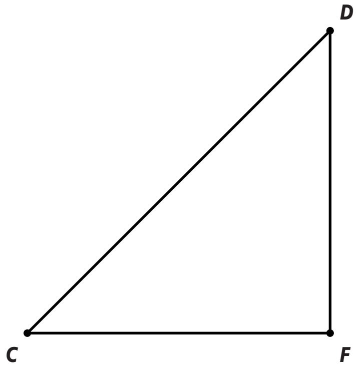
c Beide lijnen liggen in het vlak $BCHE$.

d Gegeven is $BC = EH = 6$.
Met Pythagoras krijg je $BE^2 = AB^2 + AE^2 = 72$ en dus $BE = \sqrt{72} \approx 8{,}49$.

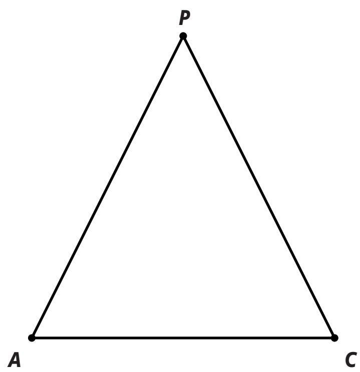


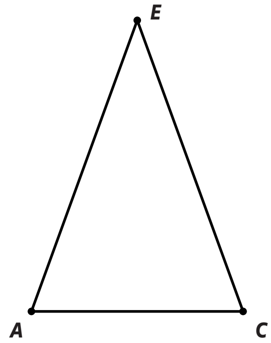
e $\triangle BCE$ is een rechthoekige driehoek, dus $\tan \angle BCE = \dfrac{BE}{BC}$
$\angle BCP = \angle BCE = \tan^{-1}\left(\dfrac{BE}{BC}\right) = \tan^{-1}\left(\dfrac{8{,}49}{6}\right) \approx 54{,}8°$.
$\triangle BCP$ is een gelijkbenige driehoek dus geldt
$\angle CBP = 54{,}8°$ en $\angle BPC = 180° - 2 \cdot 54{,}8° \approx 70°$.

16a Beide lijnen liggen in vlak $ACFD$.
$\tan \angle DCF = \dfrac{DF}{CF} = 1$ dus $\angle DCF = \tan^{-1}(1) = 45°$



b P ligt in het midden van BE, dus $BP = EP = 2$.
Beide lijnen liggen in het vlak APC.
Met Pythagoras volgt $CP^2 = BC^2 + BP^2 = 4^2 + 2^2 = 20$,
dus $CP = \sqrt{20} \approx 4{,}47$.
$\triangle ACP$ is gelijkbenig en dus $AP = \sqrt{20} \approx 4{,}47$.
Cosinusregel: $AC^2 = AP^2 + CP^2 - 2 \cdot AP \cdot CP \cdot \cos(\angle APC)$
$2 \cdot AP \cdot CP \cdot \cos(\angle APC) = AP^2 + CP^2 - AC^2$
$\cos(\angle APS) = \dfrac{AP^2 + CP^2 - AC^2}{2 \cdot AP \cdot CP} = \dfrac{4{,}47^2 + 4{,}47^2 - 4^2}{2 \cdot 4{,}47 \cdot 4{,}47} = 0{,}600$
Dus $\angle ASP = \cos^{-1} 0{,}600 \approx 53°$.





c De lijnen AE en CE liggen in het vlak AEC. Met Pythagoras volgt $CE^2 = CF^2 + EF^2 = 4^2 + 4^2 = 32$, dus $CE = \sqrt{32} \approx 5{,}66$.
Omdat ΔACE gelijkbenig is, is $AE = \sqrt{32} \approx 5{,}66$.
Cosinusregel: $AC^2 = AE^2 + CE^2 - 2 \cdot AE \cdot CE \cdot \cos\angle AEC$.

$\cos\angle AEC = \dfrac{AE^2 + CE^2 - AC^2}{2 \cdot AE \cdot CE}$ en dus is $\angle AEC \approx 41{,}4°$.

De lijnen AP en PF liggen in vlak APF.
Met Pythagoras volgt $AF^2 = AC^2 + CF^2 = 4^2 + 4^2 = 32$, dus $AF = \sqrt{32} \approx 5{,}66$
Bij opdracht b is berekend dat $AP = \sqrt{20} \approx 4{,}47$.
Omdat ΔAFP gelijkbenig is, is $FP = \sqrt{20} \approx 4{,}47$.
Cosinusregel: $AF^2 = AP^2 + FP^2 - 2 \cdot AP \cdot FP \cdot \cos\angle APF$

$\cos\angle APF = \dfrac{AP^2 + FP^2 - AF^2}{2 \cdot AP \cdot FP}$ en $\angle APF \approx 78{,}6°$.

bladzijde 17

17a De lijnen BE en CH lopen zijn evenwijdig aan elkaar. Lijn BH snijdt deze lijnen daarom onder dezelfde hoek (Z-hoeken).

b $\tan\angle ABE = \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{8}{6} \Rightarrow \angle ABE = \tan^{-1}(\tfrac{8}{6}) \approx 53{,}1°$

c AB en CH liggen niet in eenzelfde vlak, dus zijn het kruisende lijnen.

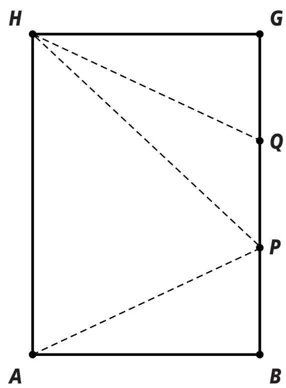
d BE en CH lopen evenwijdig aan elkaar. De hoek waaronder AB en BE elkaar snijden is daarom gelijk aan de hoek waaronder AB en CH elkaar kruisen.

e Net als in opdracht d is de hoek waaronder BP en CH elkaar kruisen gelijk aan de hoek waaronder BP en EB elkaar snijden.

$\tan\angle ABP = \dfrac{AP}{AB} = \dfrac{4}{6} \Rightarrow \angle ABP = \tan^{-1}(\tfrac{4}{6}) \approx 33{,}7°$

Dus $\angle EBP = \angle ABE - \angle ABP = 53{,}1° - 33{,}7° = 19{,}4°$ en dus kruisen de lijnen BP en CH elkaar ook onder 19,4°.

18a Alle gevraagde hoeken liggen in het vlak $ABGH$.
Pythagoras: $BG = \sqrt{BC^2 + CG^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} \approx 8{,}49$. P en Q delen BG in drie gelijke stukken, dus $BP = PQ = QG \approx \tfrac{1}{3} \cdot 8{,}49 = 2{,}83$.
Met behulp van de tekening is te zien dat:



$\tan\angle GHQ = \dfrac{GQ}{GH} = \dfrac{2{,}83}{6} \approx 0{,}47 \Rightarrow \angle GHQ = \tan^{-1} 0{,}47 \approx 25{,}2°$

$\tan\angle GHB = \dfrac{BG}{HG} = \dfrac{8{,}49}{6} \approx 1{,}42 \Rightarrow \angle GHB = \tan^{-1} 0{,}33 \approx 54{,}8°$

Bereken eerst $\angle GHP$, want $\angle PHQ = \angle GHP - \angle GHQ$.

$\tan\angle GHP = \dfrac{GP}{GH} = \dfrac{2 \cdot 2{,}83}{6} \approx 0{,}94 \Rightarrow \angle GHP = \tan^{-1} 0{,}94 \approx 43{,}3°$.

Dus $\angle PHQ = \angle GHP - \angle GHQ \approx 43{,}3° - 25{,}2° = 18{,}1°$.

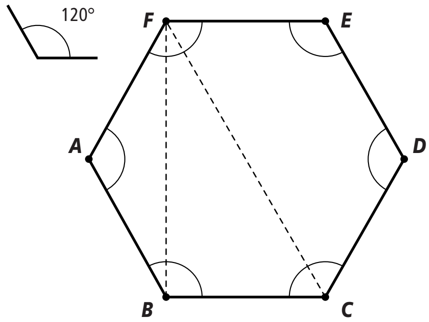
b Pythagoras: $AH = \sqrt{AD^2 + DH^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} \approx 8{,}49$;
$AP = \sqrt{AB^2 + BP^2} = \sqrt{6^2 + 2{,}83^2} \approx 6{,}63$;
$HP = \sqrt{HG^2 + GP^2} = \sqrt{6^2 + (2 \cdot 2{,}83)^2} \approx 8{,}25$.

c $\angle AHP = \angle AHG - \angle GHP \approx 90° - 43{,}3° = 46{,}7°$

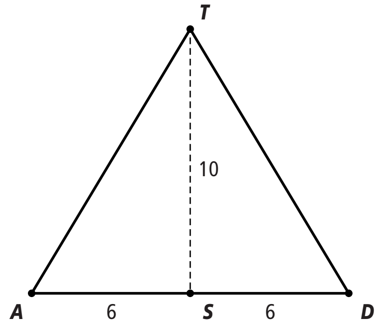
d De lijnen liggen niet in één vlak, dus ze kruisen elkaar.

e Je kunt $\angle AHF$ berekenen. $\triangle AHF$ is een gelijkzijdige driehoek dus $\angle AHF = 60°$.
Dus kruisen HF en BG elkaar ook onder 60°.

19a Het grondvlak is een regelmatig zeshoek dus zijn alle hoeken 120°.
$\triangle ABF$ is gelijkbenig $\Rightarrow$ $\angle ABF = \angle AFB$.
Dus $\angle ABF = \frac{1}{2}(180° - 120°) = 30°$ $\Rightarrow$
$\angle FBC = \angle ABC - \angle ABF = 120° - 30° = 90°$. Cosinusregel:
$BF^2 = AB^2 + AF^2 - 2 \cdot AB \cdot AF \cdot \cos\angle BAF =$
$6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos 120° = 108$
Pythagoras: $CF^2 = BF^2 + BC^2 = 108 + 6^2 = 144$ $\Rightarrow$ $CF = \sqrt{144} = 12$
Op analoge wijze kun je de andere diagonalen berekenen.



b Beide lijnen liggen in het vlak ADT.
Merk op dat de diagonalen elkaar middendoor snijden in S.
De hoek tussen AD en DT is $\angle ADT$.
$\tan\angle ADT = \dfrac{ST}{SD} = \dfrac{10}{6}$ $\Rightarrow$ $\angle ADT = \tan^{-1} \frac{10}{6} \approx 59{,}0°$,
dus de lijnen snijden elkaar onder een hoek van $59{,}0°$.



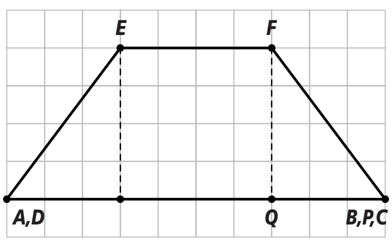
c Pythagoras: $AT = \sqrt{AS^2 + ST^2} = \sqrt{6^2 + 10^2} = \sqrt{136} \approx 11{,}7$.

d AT en BT liggen beiden in vlak ABT, de hoek tussen beiden is $\angle ATB$.
$\triangle ATB$ is een gelijkbenige driehoek want $AT = BT = \sqrt{136}$.
Cosinusregel: $AB^2 = AT^2 + BT^2 - 2 \cdot AT \cdot BT \cdot \cos\angle ATB$.
$$\cos\angle ATB = \frac{AT^2 + BT^2 - AB^2}{2 \cdot AT \cdot BT} = \frac{136 + 136 - 6^2}{2 \cdot \sqrt{136} \cdot \sqrt{136}} \approx 0{,}8676 \Rightarrow.$$
$\angle ATB = \cos^{-1} 0{,}8676 \approx 29{,}8°$

e AT en DT liggen beiden in vlak ADT, de hoek tussen beiden is $\angle ATD$.
$\angle ATD = 2 \cdot \angle ATS = 2 \cdot \tan^{-1} \frac{6}{10} \approx 61{,}9°$.

f AT en CT liggen beiden in vlak ATC, de hoek tussen beiden is $\angle ATC$.
Eerst AC berekenen met de cosinusregel:
$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos\angle 120° = 108$ $\Rightarrow$ $AC \approx 10{,}4$.
Nu de cosinusregel in ΔATC: $AC^2 = AT^2 + CT^2 - 2 \cdot AT \cdot CT \cdot \cos\angle ATC$.
$$\cos\angle ATC = \frac{AT^2 + CT^2 - AC^2}{2 \cdot AT \cdot CT} = \frac{136 + 136 - 108}{2 \cdot \sqrt{136} \cdot \sqrt{136}} \approx 0{,}6029 \Rightarrow \angle ATC = \cos^{-1} 0{,}6029 \approx 52{,}9°.$$

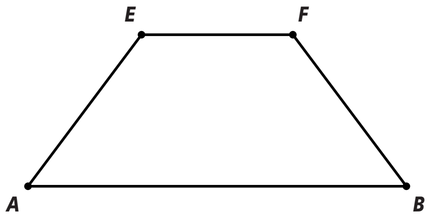
20a De dakgoten liggen 5 meter boven de grond en de nok 9 meter, dus de nok ligt 4 meter boven de dakgoten. EF is 4 meter, het hele dak is 10 meter. Dus BQ heeft een lengte van $\frac{1}{2}(10 - 4) = 3$ meter. Een vooraanzicht van het dak is:



Pythagoras: $PF^2 = QB^2 + (\text{hoogte})^2 = 3^3 + 4^2 = 25$, dus $PF = 5$ m.

b Pythagoras: $FB^2 = FP^2 + BP^2 = 5^2 + 3^2 = 34$, dus $FB = \sqrt{34} \approx 5{,}83$ m.
Pythagoras: $FB^2 = FQ^2 + BQ^2$, dus $FQ = \sqrt{FB^2 - BQ^2} \approx \sqrt{34 - 3^2} = 5$ m.

c



d Uit de symmetrie van het dak volgt $AE = DE = FB = \sqrt{34}$ m en $AD = 6$ m .
Cosinusregel: $AD^2 = AE^2 + DE^2 - 2 \cdot AE \cdot DE \cdot \cos \angle AED$.

$$\cos \angle AED = \frac{AE^2 + DE^2 - AD^2}{2 \cdot AE \cdot DE} = \frac{34 + 34 - 6^2}{2 \cdot \sqrt{34} \cdot \sqrt{34}} \approx 0,4706 \;\Rightarrow\; \angle AED = \cos^{-1} 0,4706 \approx 61,9°.$$

1.4 Loodrecht

bladzijde 18

21b Als de geodriehoek een hoek van 90° maakt met het tafelblad. De geodriehoek staat loodrecht op het tafelvlak.

c Ja, de geodriehoek staat loodrecht op de randen van de tafel.

d Bij het zijaanzicht waarbij je de geodriehoek alleen als een lijnstuk ziet.

e Alle lijnen die loodrecht staan op het lijnstuk waarmee de geodriehoek het tafelblad raakt.

22a AB en BG maken een hoek van 90°.

b AB en BP; AB en BC alsmede AB en BF snijden elkaar onder 90°.

c AB en CF kruisen elkaar loodrecht.

d AB maakt met elke lijn in vlak $BCGF$ een hoek van 90°.

bladzijde 19

23a CD staat loodrecht op BC en CD staat loodrecht op CG. De lijnen BC en CG snijden elkaar, dus CD staat loodrecht op twee snijdende lijnen in vlak BCG en daarmee loodrecht op vlak BCG zelf.

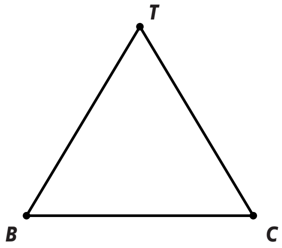
b AC snijdt lijn BD loodrecht en AC kruist lijn DF loodrecht. De lijnen BD en DF snijden elkaar, dus AC staat loodrecht op twee snijdende lijnen in vlak BDF en daarmee loodrecht op vlak BDF zelf.

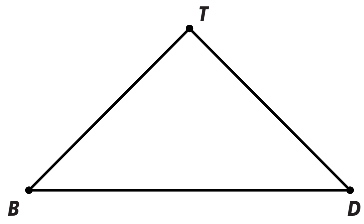
c Lijn CF ligt in vlak EFC maar CF en GF staan niet loodrecht op elkaar. Dus GF staat niet loodrecht op elke lijn in vlak EFC en daarmee niet loodrecht op vlak EFC zelf.

d MN loopt evenwijdig aan EG. Lijn HF staat loodrecht op EG en daarmee ook loodrecht op elke lijn die evenwijdig loopt aan EG, dus loodrecht op MN.

e Nee, lijn HF ligt in vlak HFC en staat dus niet loodrecht op vlak HFC.

24a $\triangle BCT$ is een gelijkzijdige driehoek met zijde 6, zie de linkertekening.
$\triangle BDT$ is een gelijkbenige driehoek met twee zijden van 6 en zijde
$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} \approx 8{,}49$

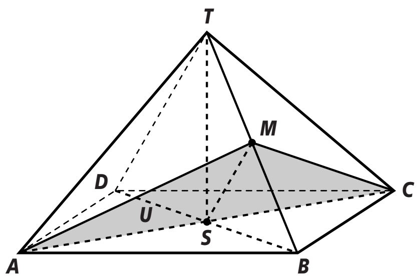




b $AB = AT$; punt M is het midden van BT, dus $BM = TM$ en ook is $AM = AM$.
Dus $\triangle ABM \cong \triangle ATM$. Hieruit volgt dat $\angle AMB = \angle AMT$, maar ook is
$\angle AMB + \angle AMT = 180°$.
Dus $\angle AMB = \angle AMT = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90° \Rightarrow AM$ staat loodrecht op BT.

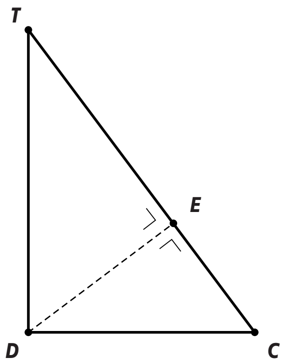
c Ook $\triangle BCT$ is een gelijkzijdige driehoek. Dus staat ook CM loodrecht op BT.

d Zowel AM als CM liggen in vlak ACM en ze snijden elkaar, dus ACM is het loodvlak van BT dat door punt A gaat.



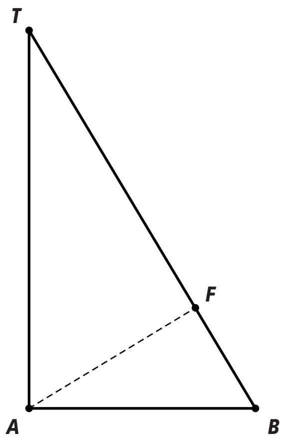
e S ligt op de lijn AC en ligt dus in vlak ACM. Alle lijnen in ACM snijden BT loodrecht, dus de lijn vanuit S naar BT die door vlak ACM gaat snijdt BT loodrecht.
Dit is de lijn SM.

25a DE maakt een hoek van 90° met AD en de lengte van AD is 6. Als we de lengte van DE weten dan kunnen je $\angle AED$ berekenen.
Lijn DE ligt in het vlak ADE en staat loodrecht op CT.



In driehoek DCT geldt $DE \cdot CT = TD \cdot DC$. Omdat $CT = \sqrt{64 + 36} = 10$ geldt
$DE \cdot 10 = 8 \cdot 6 \Rightarrow DE = 4{,}8$. In driehoek ADE is $AD = 6$ en omdat $AD \perp DCT$ staat
AD ook loodrecht op DE en is $\angle ADE = 90°$. Dan is $\angle AED = \tan^{-1} \frac{6}{4{,}8} \approx 51°$.

b AB staat loodrecht op het vlak ADT dus is driehoek TAB een rechthoekige driehoek met $AT = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ en $AB = 6$. Dan is $BT^2 = AT^2 + AB^2 = 10^2 + 6^2 = 136$



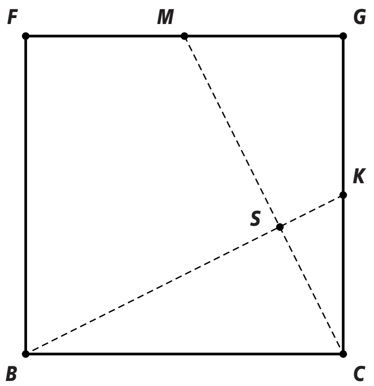
En geldt $BT \cdot AF = AB \cdot AT \Rightarrow AF = \dfrac{60}{\sqrt{136}} \approx 5{,}14$.

Vanwege de symmetrie in het vlak DBT geldt $CF = AF \approx 5{,}145$.

c Cosinusregel: $AC^2 = AF^2 + CF^2 - 2 \cdot AF \cdot CF \cdot \cos\angle AFC$, dus

$$\cos\angle AFC = \frac{AF^2 + CF^2 - AC^2}{2 \cdot AF \cdot CF} \approx \frac{5{,}145^2 + 5{,}145^2 - 72}{2 \cdot 5{,}145 \cdot 5{,}145} \approx -0{,}3596 \ \Rightarrow\ \angle AFC \approx 111°$$

26a Denk een assenstelsel langs BC en BF in het vlakdeel $BCGF$ met B als oorsprong.



Het hellingsgetal van BK is dan $\frac{1}{2}$ en het hellingsgetal van CM is dan –2.

Omdat $\frac{1}{2} \cdot -2 = -1$ snijden BK en CM elkaar loodrecht.

b CM staat loodrecht op BK. Ook kruisen DC en BK elkaar loodrecht. Dus staat BK loodrecht twee snijdende lijnen in het vlak DCM en daarmee is DCM een loodvlak van BK.

c Berekenen eerst de lengtes van de zijden van ΔCMP :

$CM = \sqrt{CG^2 + GM^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45}$

$MP = \sqrt{MF^2 + EF^2 + EP^2} = \sqrt{3^2 + 6^2 + (1\frac{1}{2})^2} = \sqrt{47\frac{1}{4}}$ en

$CP = \sqrt{6^2 + 6^2 + (4\frac{1}{2})^2} = \sqrt{92\frac{1}{4}}$

Omdat $CM^2 + MP^2 = 45 + 47\frac{1}{4} = 92\frac{1}{4} = CP^2$ is $\angle PMC = 90°$.

1.5 Hoek tussen lijn en vlak

bladzijde 20

27a $\tan\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{3} \Rightarrow \angle BAC = \tan^{-1}\frac{4}{3} \approx 53{,}1°$

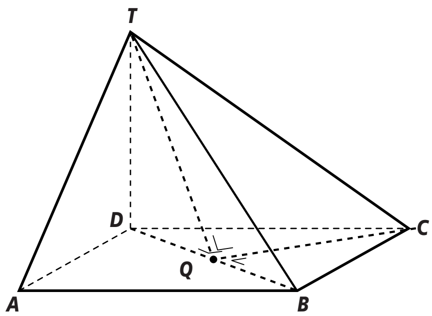
b $\angle BAC$ is groter dan $\angle B'AC'$. Dit komt omdat BC langer is dan $B'C'$ maar de paal dezelfde lengte houdt. AB moet daarom een grotere helling hebben dan AB' en dus is $\angle BAC$ groter dan $\angle B'AC'$.

28a De lijn AD.

b $\tan\angle DAT = \frac{DT}{AD} = \frac{3}{4} \Rightarrow \angle DAT = \tan^{-1}\frac{3}{4} \approx 36{,}9°$

c AC staat loodrecht op BD omdat beiden diagonalen zijn van een vierkant. BD ligt in vlak BDT. Tevens wordt AC loodrecht gekruist door DT. Lijn DT ligt in vlak BDT en snijdt BD. Dus AC staat loodrecht op twee elkaar snijdende lijnen van vlak BDT en staat dus loodrecht op BDT zelf.

d Noem het snijpunt van lijn BD met AC punt Q. De projectie van CT op BDT is dan QT



e De hoek tussen ribbe CT en vlak BDT is $\angle CTQ$.
Dan is $CT = \sqrt{CD^2 + DT^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ en $CQ = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + 4^2} = 2\sqrt{2}$.
Hieruit volgt $\sin\angle CTQ = \frac{CQ}{CT} = \frac{2\sqrt{2}}{5} \Rightarrow \angle CTQ = \sin^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{5} \approx 34{,}1°$.

bladzijde 21

29a De projectie van AB is KB; de projectie van CF is KL; de projectie van CE is KE; de projectie van BD is BL.

b CF staat loodrecht op het vlak ABC. De loodrechte projectie van CF op ABC is punt C.

c De loodrechte projectie van BF op het vlak KLE is BL. De hoek tussen BF en BL is $\angle FBL$.
$BF = \sqrt{BC^2 + BE^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} \approx 8{,}94$ en $FL = 2$, dus
$\sin\angle FBL = \frac{FL}{BF} \approx \frac{2}{8{,}94} \Rightarrow \angle FBL \approx \sin^{-1}\frac{2}{8{,}94} \approx 12{,}9°$.

d Noem het punt halverwege AB punt P, de loodrechte projectie van CE op het vlak ABE is EP.
De hoek tussen CE en EP is $\angle CEP$.
In $\triangle BCP$ geldt $CP = \sqrt{BC^2 - BP^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12}$.
In $\triangle BEP$ geldt $EP = \sqrt{BP^2 + BE^2} = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68}$.

$$\tan \angle CEP = \frac{CP}{EP} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{68}} \Rightarrow \angle CEP \approx 22{,}8°$$

30a Voorvlak: AF; linkervlak: AH; achtervlak: DG; rechtervlak: BG; bovenvlak: EG; grondvlak: AC.

b De hoeken in een kubus zijn alleen afhankelijk van de verhouding van de ribben. De verhoudingen tussen de ribben van een kubus zijn altijd hetzelfde, ongeacht de grootte van de kubus. En daarmee zijn de hoeken ook altijd hetzelfde.

c De loodrechte projectie van AG op $BCGF$ is BG. De hoek tussen AG en BG is $\angle AGB$.

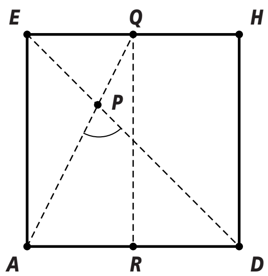
$BG = \sqrt{4^2 + 4^2} \approx 5{,}66$. Dan is $\tan \angle AGB = \frac{AB}{BG} \approx \frac{4}{5{,}66} \Rightarrow \angle AGB \approx \tan^{-1} \frac{4}{5{,}66} \approx 35°$.

d De bij opdracht a gevonden projecties zijn allen even groot, evenals de ribben van de kubus. De hoek tussen AG en de projecties is daarmee ook even groot.

e Laat S het midden zijn van HF en T het midden van BD, dan is ST de projectie van AG op $BDHF$. Merk op dat ST evenwijdig loopt aan CG, de hoek tussen AG en ST is dus gelijk aan de hoek tussen AG en CG, zijnde $\angle AGC$. Zijde $AC = BG \approx 5{,}66$

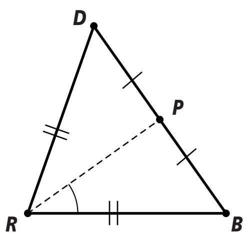
$$\tan \angle AGC = \frac{AC}{CG} \approx \frac{5{,}66}{4} \Rightarrow \angle AGC \approx \tan^{-1} \frac{5{,}66}{4} \approx 55°$$

f De loodrechte projectie van AQ op vlak EFC is lijn ED. Hieronder is vlakdeel $ADHE$ getekend, het snijpunt van AQ en ED is punt P en punt R ligt halverwege AD.



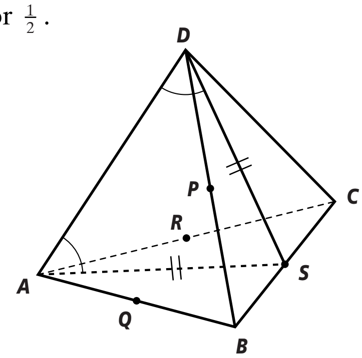
Je gaat $\angle APD$ berekenen door eerst $\angle ADE$ en $\angle DAQ = \angle RAQ$ te berekenen.
$\angle ADE = \tan^{-1} \frac{4}{4} = 45°$ en $\angle RAQ = \tan^{-1} \frac{4}{2} \approx 63{,}4°$.
Dus $\angle APD = 180° - \angle ADE - \angle RAQ \approx 71{,}6°$.

31a De loodrechte projectie van PR op ABC is BR. De hoek tussen PR en BR is $\angle BRP$.
Merk op dat $D.ABC$ een regelmatig viervlak is, dus alle zijvlakken zijn gelijk. Hieruit volgt dat $BR = DR$.



Omdat P het midden is van PR, is $BP = DP$. Ook is $PR = PR$.
Dus $\triangle BPR$ en $\triangle DPR$ hebben paarsgewijs gelijke zijden en dus is ook $\angle BPR = \angle DPR$.
En ook is $\angle BPR + \angle DPR = 180°$ dus is $\angle BPR = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$.
Driehoek BPR is dus een rechthoekig driehoek.
Pythagoras: $BR = \sqrt{AB^2 - AR^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} \approx 10{,}4$.
Dus $\sin \angle BRP = \dfrac{BP}{BR} \approx \dfrac{6}{10{,}4} \Rightarrow \angle BRP \approx \sin^{-1} \frac{6}{10{,}4} \approx 35°$.

b Noem het midden van BC punt S. De loodrechte projectie van PQ op vlak ABC is QS. De hoek tussen PQ en QS is $\angle PQS$.
Merk op dat ΔPQS en ΔDAC gelijkvormig zijn met vergrotingsfactor $\frac{1}{2}$.
Dus $\angle PQS = \angle DAC$. Omdat ΔDAC een gelijkzijdige driehoek is, is $\angle DAC = \angle PQS = 60°$.



c Noem net als bij opdracht b het midden van BC punt S.
De loodrechte projectie van AD op BCD is DS.
De hoek tussen AD en DS is $\angle ADS$.
De loodrechte projectie van AD op ABC is AS.
De hoek tussen AD en AS is $\angle DAS$.
Omdat alle zijden uit gelijke driehoeken bestaan, geldt dat $AS = DS$, dus ΔASD is een gelijkbenig driehoek $\Rightarrow \angle ADS = \angle DAS$.

32a De loodrechte projectie van AF op $ABED$ is AD.
De hoek tussen AF en AD is $\angle DAF$.
$\tan \angle DAF = \dfrac{DF}{AD} = \dfrac{2}{6} \Rightarrow \angle DAF = \tan^{-1} \frac{2}{6} \approx 18{,}4°$.

b Omdat DE evenwijdig is aan AB is $\angle DEF$ de gevraagde hoek.
Bereken eerst met Pythagoras de zijden van ΔDEF.
$CE = \sqrt{52}$; $CD = \sqrt{40}$; $DE = 4$.
Cosinusregel: $\cos \angle CED = \dfrac{40 - 16 - 52}{-2 \cdot 4 \cdot \sqrt{52}} \approx 0{,}49 \Rightarrow \angle CED \approx 61°$.
Dus CE en AB kruisen elkaar onder 61°.

1.6 Hoek tussen twee vlakken

bladzijde 22

33b 90°
c Een zijaanzicht dat loodrecht staat op EF. Dus zie je EF als één punt.
d $\angle AEB$ is groter dan 90°.

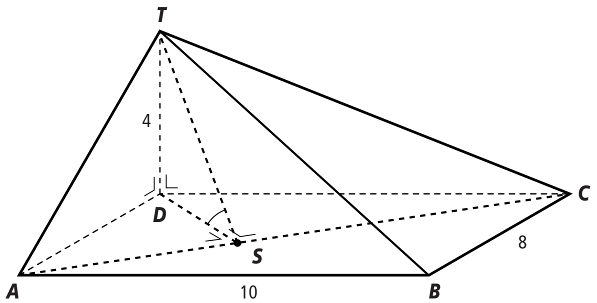
34b Elk been wordt op een vlakdeel gezet. Als de zwaaihaak op deze wijze wordt neergezet staan de beide benen van de zwaaihaak loodrecht op de snijlijn van de beide vlakdelen. De hoek die ze benen van de zwaaihaak dan maken is de hoek tussen de beide vlakken.

bladzijde 23

35a De snijlijn van TBC met het grondvlak is BC. Het vlak TBC staat loodrecht op TCD en dus is TCD een standvlak. Dan is $\angle TCD$ een standhoek.

Er geldt dat $\tan \angle TCD = \dfrac{DT}{CD} = \dfrac{4}{10} \Rightarrow \angle TCD = \tan^{-1}(\frac{4}{10}) \approx 21{,}8°$, dus de hoek tussen de vlakken TBC en het grondvlak is ongeveer 21,8°.

b De snijlijn van ACT met het grondvlak is AC. Trek vanuit D een lijn loodrecht op AC en noem het snijpunt van deze lijn met AC punt S.



Het vlak DST staat loodrecht op AC en dus is DST een standvlak. Dan is $\angle DST$ een standhoek.

In driehoek ACD geldt $AD \cdot DC = DS \cdot AC$ en ook is $AC = \sqrt{10^2 + 8^2} = \sqrt{164}$.

Dus $8 \cdot 10 = DS \cdot \sqrt{164} \Rightarrow DS = \dfrac{80}{\sqrt{164}} \approx 6{,}25$

$\tan \angle DST = \dfrac{DT}{DS} \approx \dfrac{4}{6{,}25} \Rightarrow \angle DST \approx 32{,}6°$

Dus de hoek tussen de vlakken ACT en het grondvlak is ongeveer 32,6°.

c De snijlijn van BDT en ADT is lijn DT. Het vlak $ABCD$ staat loodrecht op DT en dus is $ABCD$ een standvlak. Dan is $\angle ADB$ een standhoek.

Er geldt dat $\tan \angle ADB = \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{10}{8} \Rightarrow \angle ADB = \tan^{-1} \frac{10}{8} \approx 51{,}3°$.

d Elk vlak dat door de lijn TD gaat (met andere woorden: elk vlak waar de lijn TD geheel in ligt) staat loodrecht op vlak $ABCD$.

36a Alle ribben van de piramide zijn even lang, dus ABT is een gelijkzijdige driehoek. Dan is AS een hoogtelijn in deze driehoek en dus staat AS loodrecht op BT. Met een analoge redenering vind je dat CS loodrecht staat op BT. CS en AS snijden elkaar en liggen beide in vlak ASC, dus BT staat loodrecht op ASC.

b De vlakken ABT en BCT.

c Het vlak ASC is het standvlak en $\angle ASC$ is de standhoek. Om $\angle ASC$ met de cosinusregel moet je eerst de lengtes van AC, AS en CS berekenen.

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{128}$; $AS = CS = \sqrt{AB^2 - BS^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48}$.

Cosinusregel: $AC^2 = AS^2 + CS^2 - 2 \cdot AS \cdot CS \cdot \cos \angle ASC$

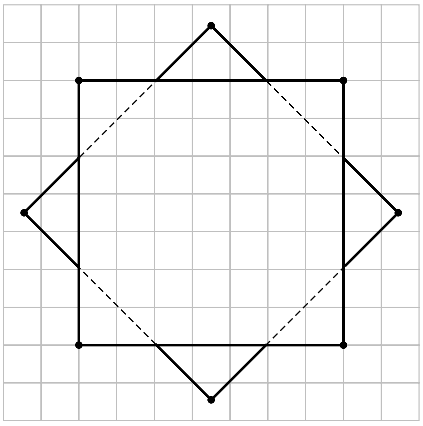
$\cos \angle ASC = \dfrac{AS^2 + CS^2 - AC^2}{2 \cdot AS \cdot CS} = \dfrac{48 + 48 - 128}{2 \cdot \sqrt{48} \cdot \sqrt{48}} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \angle ASC = \cos^{-1}(-\frac{1}{3}) \approx 109°$

d Lijn BT staat loodrecht op vlak ACS en vlak BDT gaat door lijn BT, dus vlak BDT staat loodrecht op vlak ACS.

e 90° want AC staat loodrecht op het vlak BDT dus kruist of snijdt AC elke lijn in dat vlak loodrecht.

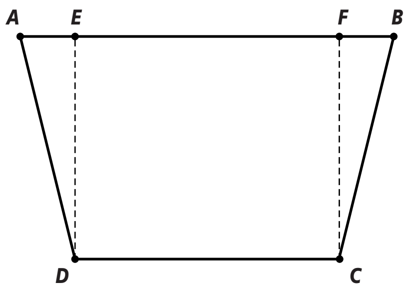
37a Het bovenvlak is 45° gedraaid ten opzichte van het grondvlak.

b Het bovenvlak en het grondvlak zijn vierkanten met zijden van 14 cm. Het vierkant van het bovenvlak is 45° gedraaid ten opzichte van het grondvlak. Je krijgt dan als bovenaanzicht (waarbij elk hokje 2×2 cm is):



c De gelijkzijdige driehoeken hebben zijden van 14 cm. Een hoogtelijn heeft dan lengte $\sqrt{14^2 - 7^2} = \sqrt{147} \approx 12{,}1$ cm.

d Twee tegenoverliggende hoekpunten in het bovenvlak zijn $\sqrt{14^2 + 14^2} = 14\sqrt{2} \approx 19{,}8$ cm van elkaar verwijderd. De onderzijde van de doorsnede heeft lengte 14 cm. De zijden van de doorsnede zijn de bij opdracht c berekende hoogtelijnen. Je krijgt als mogelijke doorsnede:



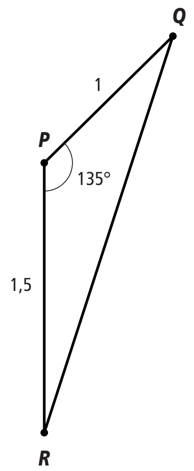
e Met de doorsnede die hierboven staat kun je de hoogte berekenen. De bovenkant van de doorsnede is $14\sqrt{2}$ cm breed, de onderkant 14 cm. Dan geldt $AE = BF = 7\sqrt{2} - 7 \approx 2{,}9$ cm.
Dus de hoogte $DE = CF = \sqrt{BC^2 - BF^2} = \sqrt{147 - (7\sqrt{2} - 7)^2} \approx 11{,}8$ cm.

f Gebruiken weer de doorsnede voor de berekening van de hoek. De lijn door D loodrecht de doorsnede is een snijlijn van een zijvlak met het grondvlak. Het zijvlak waarvan AD de hoogtelijn is staat loodrecht op deze lijn, dus het zijvlak waarin AD ligt is een standvlak $\angle ADC$ is een standhoek. In ΔADE is $\angle ADE \approx \cos^{-1}\left(\frac{11{,}7}{12{,}1}\right) \approx 14{,}8°$. Dus is de gezochte scherpe hoek 76,2°.

1.7 Gemengde opdrachten

bladzijde 24

38a



De hoek tussen het noordoosten en het zuiden is 135°, dus $\angle QPR = 135°$.
Cosinusregel:
$QR^2 = PR^2 + QR^2 - 2 \cdot PR \cdot QR \cdot \cos\angle QPR = 1^2 + 1,5^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1,5 \cdot \cos\angle 135° \approx 5,37$
Dus is $QR \approx 2,32$ km

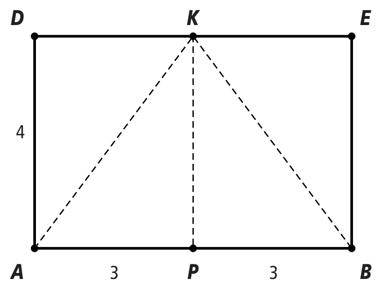
b Cosinusregel: $PR^2 = PQ^2 + RQ^2 - 2 \cdot PQ \cdot QR \cdot \cos\angle PQR$.
Dus $\cos\angle PQR = \dfrac{PQ^2 + QR^2 - PR^2}{2 \cdot PQ \cdot QR} \approx \dfrac{1^2 + 5,37 - 1,5^2}{2 \cdot 1 \cdot 2,32} \approx 0,891 \Rightarrow \angle PQR \approx 27,1°$.
En dus $\angle PRQ = 180° - \angle QPR - \angle PQR \approx 17,9°$.

39a De vloeistofspiegel van een laag water is altijd vlak. Eén van de randen van de vloeistofspiegel is de rand waarover de vaas wordt leeggegoten. Omdat de vaas een balk is, vormt een vlak dat die rand bevat altijd een rechthoek.

b Als de vaas recht overeind staat (en dus nog helemaal vol is), dan $x = 0°$. Als de vaas op zijn zijde ligt (dus geheel gekanteld is en leeg is) dan $x = 90°$. Dus $0° \leq x \leq 90°$.

c De vaas is een balk met ribben van 1 dm en 2 dm. In de middelste figuur vormt de vloeistofspiegel een diagonaal van het zijaanzicht. Dus
$\tan x = \frac{2}{1} \Rightarrow x = \tan^{-1} \frac{2}{1} \approx 63,4°$.
Omdat de vloeistofspiegel evenwijdig loopt met het oppervlak, is x gelijk aan de draaihoek (Z-hoeken).

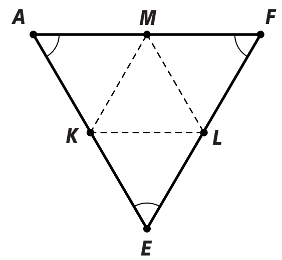
40a Bekijk de hoek tussen AB en AK, dit is $\angle BAK$. De hoeken die de andere opstaande ribben maken zijn hetzelfde. AB en AK liggen beiden in vlak $ABED$, dit vlakdeel teken je.



Hierbij is P het punt recht onder K, dus P ligt in het midden van AB. Dan geldt in $\triangle PAK$:

$$\tan \angle BAK = \frac{KP}{AK} = \frac{4}{3} \Rightarrow \angle BAK \approx 53{,}1^\circ$$

b Deze hoeken zijn gelijk aan de hoeken die KL, KM en LM maken met DE, EF en DF.
Omdat K, L en M de middens zijn geldt:
$KM \,//\, EF$, $KL \,//\, AF$ en $ML \,//\, AE$.
De hoeken die de ribben van het bovenvlak maken met de ribben van het ondervlak zijn of 0° of 60°.



c Het ondervlak en bovenvlak lopen evenwijdig, dus de hoek die vlak CLM maakt met het bovenvlak is gelijk aan de hoek die CLM maakt met het ondervlak (in feite Z-hoeken in 3D).
De snijlijn van CLM met het bovenvlak is LM. Vlak $BCEF$ staat loodrecht op LM, dus dit is het standvlak. De standhoek is dan $\angle CLF$.

$$\tan \angle CLF = \frac{FL}{CF} = \frac{3}{4} \Rightarrow \angle CLF = \tan^{-1} \tfrac{3}{4} \approx 53{,}1^\circ.$$

Dus het bovenvlak en CLF snijden elkaar onder 53,1° $\Rightarrow$ Het grondvlak en CLF snijden elkaar onder 53,1°.

d KL loopt evenwijdig met DM, dus de hoek waaronder KL en CM elkaar kruisen is gelijk aan de hoek waaronder DM en CM elkaar snijden. Dit is $\angle CMF$.
$\angle CMF = \angle CLF \approx 53{,}1^\circ$, dus KL en DM snijden elkaar onder 53,1°.

e De lijnen AM en BL liggen beiden in vlak $ABLM$ en zijn niet evenwijdig, dus ze snijden elkaar. Noem de hoek waaronder ze elkaar snijden α, het snijpunt noem je Q.
Om α vinden berekenen je eerst $\angle ABL$ en $\angle BAM$, omdat geldt:
$\alpha = 180^\circ - \angle ABL - \angle BAM$.
Om $\angle ABL$ te vinden kijk je naar ΔABL, bereken je alle zijden van deze driehoek en gebruik de cosinusregel. $AB = 6$ en in ΔBEL is $BL = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
AL ligt in de rechthoekige driehoek ADL. Dus is
$AL = \sqrt{AD^2 + DL^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$.
Cosinusregel: $AL^2 = AB^2 + BL^2 - 2 \cdot AB \cdot BL \cdot \cos \angle ABL$

$$\cos \angle ABL = \frac{AB^2 + BL^2 - AL^2}{2 \cdot AB \cdot BL} = \frac{6^2 + 5^2 - 41}{2 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{1}{3} \Rightarrow \angle ABL = \cos^{-1} \frac{1}{3} \approx 70{,}5^\circ.$$

Uit de symmetrie volgt dat ΔABQ een gelijkbenige driehoek is dus
$\angle BAM = \angle ABL \approx 70{,}5^\circ$. Dus $\alpha = 180^\circ - \angle ABL - \angle BAM \approx 180^\circ - 2 \cdot 70{,}5^\circ = 39^\circ$.

bladzijde 25

41a Het aantal meter buis vind je door het aantal stukken buis te tellen: 28 stukken dus 28 meter.

b Ja, QG en PE zijn evenwijdig.

c PF is evenwijdig aan AE, ET en SH.

d $\angle PFQ = \angle PBQ = 90^\circ$ want de driehoeken PBQ en PFQ zijn congruent.
De hoek tussen PF en FG is gelijk aan de hoek tussen BF en FG. Deze lijnen snijden elkaar in $\angle BFG$. Elke driehoek bestaande uit drie stukken buis heeft drie gelijke zijden, is dus een gelijkzijdige driehoek en heeft dan hoeken van 60°.
Dan is $\angle BFG = \angle BFQ + \angle QFG = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$ en dus is $\angle PFG = 120^\circ$.

e Eerst de hoek die de lijn PT met het grondvlak maakt. Deze lijn ligt in de gelijkbenige $\triangle PTR$ en daarvan is zijde $PR = 2$ en de zijden $RT = PT = \sqrt{AT^2 - AP^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

Dan geldt $\angle TPR = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 54,74°$.

Dan de hoek die de lijn BT met het grondvlak maakt. Deze lijn ligt in de gelijkbenige $\triangle BTD$.

In $\triangle ABD$ is $BD = \sqrt{BA^2 + AD^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ en is $BT = DT = 2$.

Dan is $\triangle BTD$ is een gelijkbenige rechthoekige driehoek en dus is $\angle DBT = 45°$.

Het kind dat vanaf P recht omhoog klimt gaat dus over een lijn die $54,7° - 45° = 9,7°$ steiler is.

42a $\triangle BCM$ is een rechthoekige driehoek met zijde $CM = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10$. Hieruit volgt: $BC = \sin\angle x \cdot CM = 10 \cdot \sin\angle x$ en $BM = \cos\angle x \cdot CM = 10 \cdot \cos\angle x$. (Rekenmachine op radialen.)

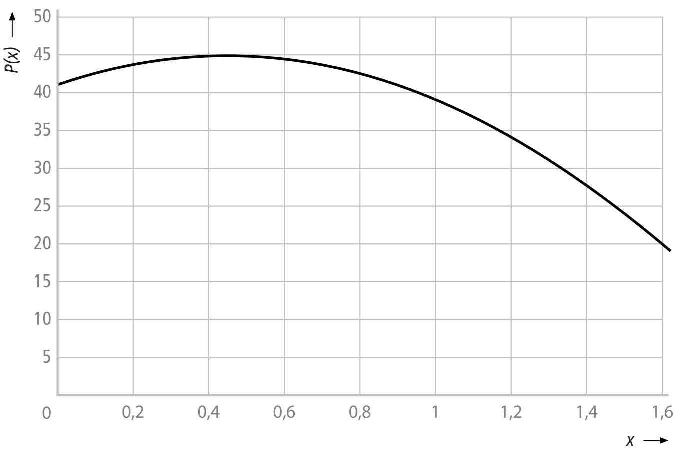
Dus $BC = 10 \cdot \sin(\frac{1}{6}\pi) = 5$ en $BM = 10 \cdot \cos(\frac{1}{6}\pi) \approx 8,66$.

De omtrek is $(AD + BC) + (BM + MA + CD) = 2 \cdot BC + 4 \cdot BM \approx 2 \cdot 5 + 4 \cdot 8,66 = 44,64$.

b $P(x) = 2 \cdot BC + 4 \cdot MB = 20\sin x + 40\cos x$.

c Als $0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$ dan heeft $P(x)$ betekenis. Als x namelijk iets groter is dan $\frac{1}{2}\pi$ dan is $\cos(x) < 0$. Dit zou betekenen dat de boven- en onderkant van de rechthoek een negatieve lengte hebben en dat kan niet.

d



e Als de omtrek maximaal is dan is de afgeleide gelijk aan nul.

$P'(x) = 20\cos x - 40\sin x = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{\sin x}{\cos x} = \tan x = \dfrac{20}{40} = \dfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; x = \tan^{-1}(\frac{1}{2}) \approx 0,464$.

Voor $x \approx 0,46$ is $P(x)$ maximaal $P(0,464) = 20\sin 0,464 + 40 \cdot \cos 0,464 \approx 44,72$.

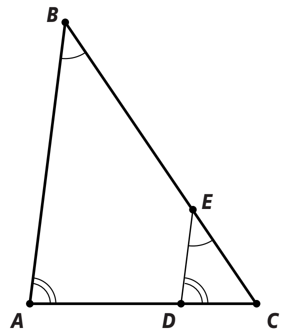
Test jezelf

bladzijde 28

T-1a $\triangle ABC \sim \triangle DEC$. Omdat $BE = 12 \Rightarrow EC = BC - BE = 18 - 12 = 6$.
Dan geldt de verhoudingstabel:

$\triangle ABC$	$BC = 18$	AB	AC
$\triangle DEC$	$EC = 6$	DE	DC

Hieruit volgt: $\dfrac{AC}{DC} = \dfrac{18}{6} = 3 \;\Rightarrow\; DC = \tfrac{1}{3} \cdot AC = 4$ en dus
$AD = AC - DC = 12 - 4 = 8$.



b $\triangle AFB \sim \triangle EFD$. Met behulp van de verhoudingstabel van opdracht a bereken je eerst DE:

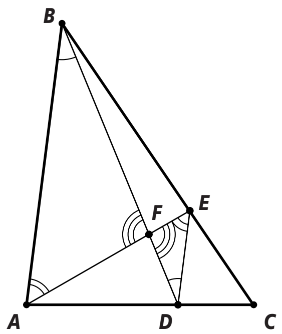
$\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{18}{6} = 3 \;\Rightarrow\; DE = \tfrac{1}{3} \cdot AB = 5$.

Noem $AF = x$, dan is $EF = \sqrt{99} - x$ en geldt de verhoudingstabel:

$\triangle AFB$	$AB = 15$	$AF = x$	BF
$\triangle EFD$	$ED = 5$	$EF = \sqrt{99} - x$	DF

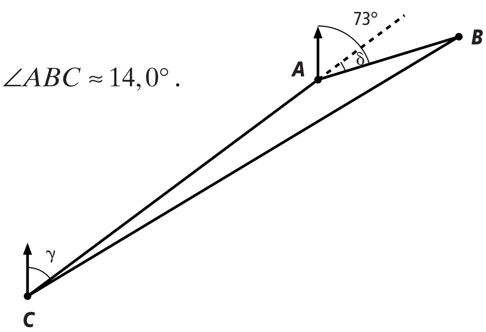
De verhouding tussen beide driehoeken is $\tfrac{15}{5} = 3$.

Dus moet gelden: $\dfrac{AF}{EF} = \dfrac{x}{\sqrt{99} - x} = 3$.
$x = 3 \cdot (\sqrt{99} - x) = -3x + 3 \cdot \sqrt{99}$.
Dus is $4x = 3 \cdot \sqrt{99}$ en is $x = \tfrac{3}{4} \cdot \sqrt{99} \approx 7{,}46$.



T-2a Cosinusregel: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC$.

$$\cos\angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{24^2 + 82^2 - 59^2}{2 \cdot 24 \cdot 82} \approx 0{,}970 \;\Rightarrow\; \angle ABC \approx 14{,}0^\circ .$$

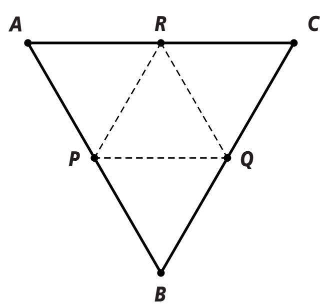


b De piloot vloog op CA met een hoek γ ten opzichte van het noorden. Bij punt A aangekomen moet hij met hoek δ van het noorden af draaien om een hoek van 73° ten opzichte van het noorden te krijgen. Dus $\gamma = 73^\circ - \delta$.
Dan moet $\delta = 180^\circ - \angle CAB$.
Cosinusregel: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\angle CAB$.

$$\cos\angle CAB = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{24^2 + 59^2 - 82^2}{2 \cdot 24 \cdot 59} \approx -0{,}942 .$$

$\Rightarrow \angle CAB \approx 160{,}3^\circ$
Dus $\delta = 180^\circ - \angle CAB \approx 19{,}7^\circ$ en
$\gamma = 73^\circ - \delta \approx 73^\circ - 19{,}7^\circ = 53{,}3^\circ$.

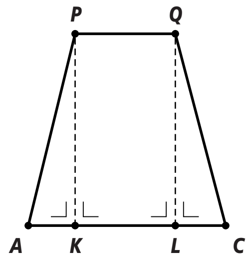
T-3a Een bovenaanzicht van dit object bestaat uit een gelijkzijdige driehoek ABC met zijden 2 waarbij de middens van de zijdens met elkaar zijn verbonden. De middens van de zijden vormen $\triangle PQR$.



b Alle buizen van driehoek PQR hebben lengte 1.

c PQ ligt evenwijdig aan AC, dus de hoek waaronder AB en PQ elkaar kruisen is gelijk aan de hoek waaronder AB en AC elkaar snijden. AB en AC snijden elkaar in $\angle BAC$. $\triangle ABC$ is een gelijkzijdige driehoek, dus $\angle BAC = 60^\circ$

d PQ en AP snijden elkaar in $\angle APQ$ en liggen beiden in vlak $ACQP$, dus teken je dit vlakdeel.
Trek vanuit P en Q loodlijnen.
Dit geeft de punten K en L op AC.
PQ ligt in het midden boven AC, dus $AK = LC = \frac{1}{2}(2-1) = \frac{1}{2}$.
Dan is $\cos\angle KAP = \frac{AP}{AK} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \angle KAP = \cos^{-1}\frac{1}{4} \approx 75{,}5°$



Door de symmetrie van de figuur geldt ook
$\angle LCQ = \angle ACQ = 75{,}5°$.
Vanwege de symmetrie van $ACQP$ geldt ook: $\angle APQ = \angle CQP$.
Bovendien zijn de hoeken van een vierhoek samen 360°.
Hieruit volgt $360° = \angle APQ + \angle CQP + 2 \cdot 75{,}5°$, dus
$\angle APQ = \frac{1}{2}(360° - 2 \cdot 75{,}5°) = 104{,}5°$.
PQ en AP snijden elkaar onder 75,5°.

e Noem het punt waar AP en CQ elkaar snijden punt M, dan snijden de lijnen met $\angle AMC$.
AP en CQ liggen beiden in het vlak $ACQP$.
Bij opdracht d van deze opgave heb je gevonden dat $\angle CAP = \angle CAM = 75{,}5°$ en $\angle ACQ = \angle ACM = 75{,}5°$. Dus $\angle AMC = 180° - \angle CAM - \angle ACM = 29°$.

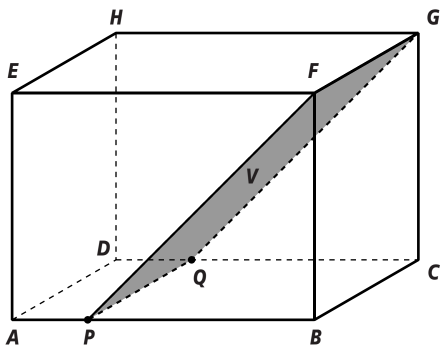
T-4a Als een ribbe loodrecht op een vlak staat, dan moeten alle lijnen in het vlak loodrecht op de ribbe staan. BT ligt in vlak ABT, maar staat niet loodrecht op BC. Immers: de hoek tussen beiden is $\angle CBT = 60°$, want $\triangle BCT$ is een gelijkzijdige driehoek.
Dus er is een lijn in het vlak ABT die niet loodrecht op BC staat en dus staat vlak ABT niet loodrecht op BC.

b Als BT loodrecht staat op het vlak ACS dan geldt $\angle ASC = 90°$. Omdat ΔABT een gelijkzijdige driehoek is moet S het midden zijn van BT.

c BT staat loodrecht op het vlak ACS. Dus alle lijnen in het vlak ACS snijden of kruisen BT loodrecht. AC ligt in het vlak ACS en kruist BT dus onder een hoek van 90°.

bladzijde 29

T-5a Laat Q het snijpunt van vlak V met CD zijn.

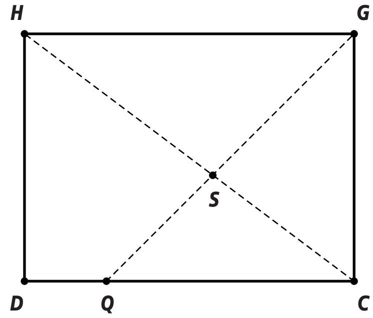


b De loodrechte projectie van de lijn DH op V is de lijn door QG. De hoek tussen DH en vlak V is daarom gelijk aan de hoek tussen de lijnen DH en QG. Omdat DH evenwijdig loopt aan CG is deze hoek ook gelijk aan de hoek tussen CG en QG.

$\tan \angle QGC = \dfrac{QC}{CG} = \dfrac{3}{3} = 1 \;\Rightarrow\; \angle QGC = \tan^{-1} 1 = 45°$.

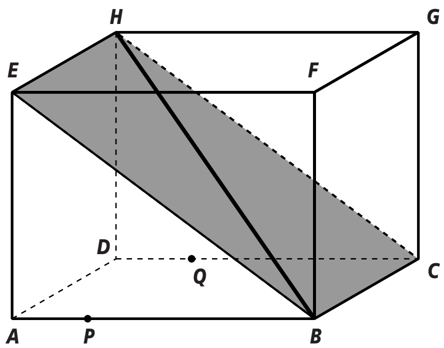
Dus de hoek tussen DH en vlak V is 45°.

c De loodrechte projectie van de lijn HC op V is eveneens de lijn QG. De hoek tussen HC en vlak V is daarom gelijk aan de hoek tussen de lijnen HC en QG.
Noem het snijpunt van HC en QG punt S, dan moet je $\angle CSG$ berekenen.
HC en QG liggen beiden in vlak $CDHG$.
Uit opdracht a is bekend dat $\angle QGC = 45°$.
Gebruik dat $\triangle CGH$ een rechthoekige driehoek is, dan is $\tan \angle GCH = \dfrac{GH}{CG} = \dfrac{4}{3} \;\Rightarrow\; \angle GCH = \tan^{-1} \tfrac{4}{3} \approx 53{,}1°$.



Dus $\angle CSG = 180° - \angle QGC - \angle GCH = 180° - \angle SGC - \angle GCS \approx 180° - 45° - 53{,}1° = 81{,}9°$.
Dus de lijn HC en het vlak V snijden elkaar onder 81,9°.

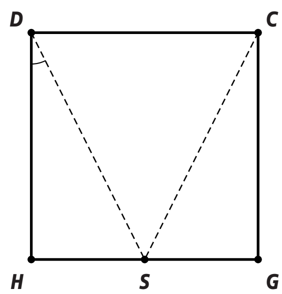
d HB is de projectie van HF op $EBCH$.



e De projectie van HF op $EBCH$ is HB, dus de hoek tussen HF en $EHCH$ is de hoek tussen HF en HB. Dan is $HF = \sqrt{HG^2 + FG^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ en
$\tan \angle BHF = \dfrac{BF}{HF} = \dfrac{3}{5} \;\Rightarrow\; \angle BHF \approx 31{,}0°$.

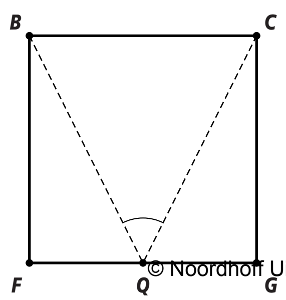
T-6a De vlakken ADT en ADH snijden elkaar in lijn AD.
Een vlak waarin je de hoek tussen ADT en ADH op ware grootte kunt zien moet loodrecht staan op AD.
Kies hiervoor $HGCD$ met de projecties van vlak ADT (lijn DS) en vlak ADH (lijn DH), waarbij S het midden van GH is.

b De hoek tussen beide vlakken is de hoek tussen DH en DS is $\angle HDS$.



$\tan \angle HDS = \dfrac{HS}{DH} = \dfrac{3}{6} \;\Rightarrow\; \angle HDS \approx 26{,}6°$.

Beide vlakken snijden elkaar onder 26,6°.

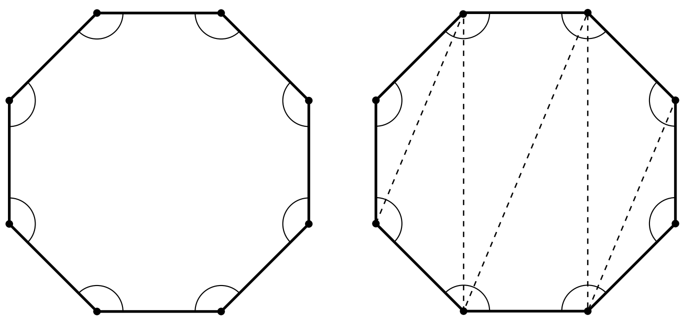


c De vlakken ABT en DCT snijden elkaar in een lijn die evenwijdig loopt aan EF en door T gaat.
Een vlak waarin je de hoek tussen ABT en DCT op ware grootte kunt zien moet loodrecht staan op deze lijn.
Een vlak dat hieraan voldoet is $BCGF$.
In het vlakdeel $BCGF$ zijn de projecties van ABT (lijn BQ) en DCT (lijn CQ) te zien, waarbij Q het midden van FG is.

$$\tan \angle BQF = \frac{BF}{QF} = \frac{6}{3} \Rightarrow \angle BQF = \tan^{-1}(\tfrac{6}{3}) = 63,4° .$$

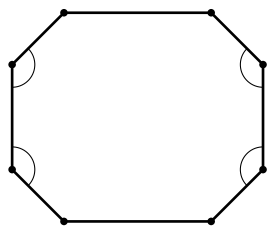
Door de symmetrie van het vierkant geldt ook $\angle CQG = \tan^{-1}(\tfrac{6}{3}) \approx 63,4°$.
Dus is $\angle BQC = 180° - \angle CQG - \angle BQF = 53,2°$.
Beide vlakken snijden elkaar dus onder 53,2°.

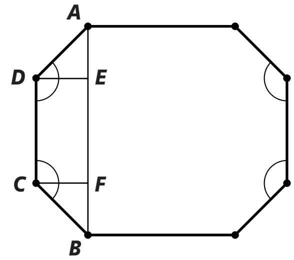
T-7a Kies een snijlijn tussen twee vlakken en kies vervolgens een vlak loodrecht op deze lijn.



Alle ribben zijn 12 cm, dus dit vlak is een regelmatig achthoek: elke stompe hoek is even groot. Verdelen in driehoeken geeft zes driehoeken met totaal $180° \times 6 = 1080°$ en dus is elke stompe hoek $\frac{1080°}{8} = 135°$.

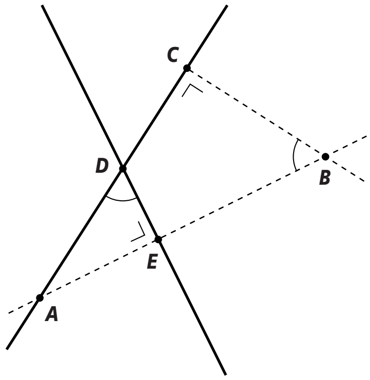
b Kies een snijlijn tussen een vierkant en een driehoek en vervolgens een vlak loodrecht op deze lijn.
Je krijgt dan de eerste figuur hiernaast.
Nu zijn echter niet alle zijden even lang.
Er zijn twee zijden van 12 cm,
twee zijden van $\sqrt{12^2+12^2} = 12\sqrt{2}$ cm en
vier zijden van $\sqrt{12^2-6^2} = \sqrt{108}$ cm.
Met behulp van opdracht a bereken je de hoogte van de lantaarn.
Alle zijden in de tekening zijn 12 cm en alle schuine zijden staan onder een hoek van 45°.
De hoogte van een schuine zijde is $12 \cdot \sin(45°) = 6\sqrt{2}$.
De hoogte van de lantaarn wordt daarmee $12 + 2 \cdot 6\sqrt{2} = 12 + 12\sqrt{2}$.
In de tekening is $AE = 6\sqrt{2}$ en is $AD = \sqrt{108}$.





Dan is $\sin \angle ADE = \frac{AE}{AD} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{108}} \Rightarrow \angle ADE \approx 54,7°$.
En dus is (stompe) hoek tussen een driehoekig en een vierkant vlakdeel $\angle ADC \approx 90° + 54,7° = 144,7°$.

T-8a Teken een aanzicht van de beide vlakken in de richting van de snijlijn. Dan krijg je de volgende figuur waarbij de vette lijnen de vlakken zijn en de dunne lijnen de loodlijnen. De letters zijn alleen om onderstaande uitleg te verduidelijken. Merk op dat B het snijpunt van de projecties van de loodlijnen is en D de projectie van de snijlijn van de vlakken.



$\angle BAC = \angle DAE$ en $\angle ACB = \angle AED$ $\Rightarrow$ De derde hoek van $\triangle ABC$ is gelijk aan de derde hoek van ΔAED, dus $\angle ABC = \angle ADE$.
Dus de hoek waaronder de vlakken elkaar snijden is gelijk aan de hoek waaronder de loodlijnen elkaar snijden.

b Als een lijn twee vlakken V en W loodrecht snijdt, dan staan V en W evenwijdig.

c Nee, dit klopt niet. Als de twee lijnen in het vlak evenwijdig zijn dan ligt een loodrecht snijdende lijn ook in dat vlak.

