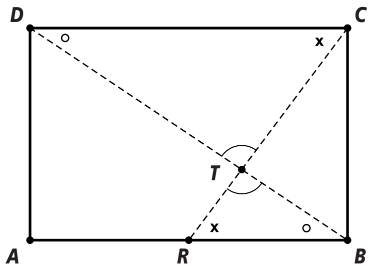
Hoofdstuk 2 - Afstanden

2.1 De afstand vanuit een punt

bladzijde 32

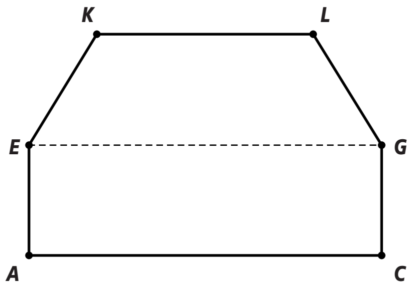
1a Driehoek BRQ is een rechthoekige driehoek met $BR = 5$ en $RQ = 2$, dus geldt $BQ^2 = BR^2 + RQ^2 = 5^2 + 2^2 = 29 \;\Rightarrow\; BQ = \sqrt{29} \approx 5{,}39$

b DB en RC liggen beiden in het vlakdeel $ABCD$.



Dan is $RC = \sqrt{RB^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + 8^2} = \sqrt{89}$.
Er geldt dat $\triangle CTD \sim \triangle RTB$ met factor 2 want $DC = 2 \cdot RB$. Dus is $RT = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{89} \approx 3{,}14$

c AG ligt in het vlakdeel $ACGE$.



d $\angle ACG$ is een rechte hoek. $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{10^2 + 8^2} = \sqrt{164}$.
Met Pythagoras krijg je: $AG = \sqrt{AB^2 + BC^2 + CG^2} = \sqrt{10^2 + 8^2 + 4^2} = \sqrt{180} \approx 13{,}42$.

2a $HB = \sqrt{3^2 + 4^2 + 6^2} = \sqrt{61} \approx 7{,}81$

b $AP = \sqrt{AB^2 + BC^2 + CP^2} = \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = 7$; $HP = \sqrt{GP^2 + HG^2} = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40}$
en $AH = \sqrt{AD^2 + DH^2} = 5$. Dus $\triangle APH$ is niet gelijkbenig.

c $AC = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45}$; $AH = 5$ en $CH = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$.
Cosinusregel: $AH^2 = AC^2 + CH^2 - 2 \cdot AC \cdot CH \cdot \cos\angle ACH$

$\cos\angle ACH = \dfrac{AC^2 + CH^2 - AH^2}{2 \cdot AC \cdot CH} = \dfrac{45 + 52 - 5^2}{2 \cdot \sqrt{45} \cdot \sqrt{52}} \approx 0{,}7442$ dus is $\angle ACH \approx 42°$.

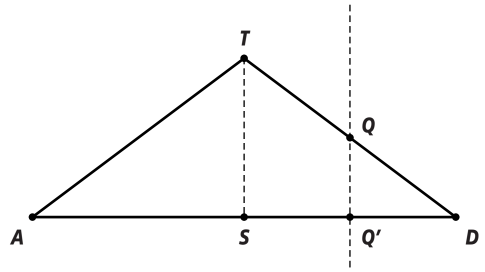
3a Verdeel het grondvlak in zes gelijkzijdige driehoeken door de diagonalen AD, BE en CF.
Deze snijden elkaar in S. Dan is $AS = AB = 4$ cm

b Pythagoras: $AT = \sqrt{AS^2 + TS^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ cm . De andere opstaande ribben zijn even lang.

c Noem het midden van AB punt R, dan is ΔBRT een rechthoekige driehoek.
Dan geldt $\cos(\angle ABT) = \cos(\angle RBT) = \dfrac{RB}{BT} = \frac{2}{5}$.

d Cosinusregel:
$AP^2 = AB^2 + BP^2 - 2 \cdot AB \cdot BP \cdot \cos\angle ABP = 4^2 + (2\frac{1}{2})^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = 14{,}25$, dus
$AP = \sqrt{14{,}25} \approx 3{,}77$ cm .

e



Omdat $\triangle ADC \sim \triangle Q'DQ$ met factor $\frac{1}{2}$ is $QQ' = \frac{1}{2}TS = 1{,}5$ cm

f $AQ' = 8 - 2 = 6$ cm en $QQ' = 1{,}5$ cm .
Dan is $AQ = \sqrt{AQ'^2 + QQ'^2} = \sqrt{6^2 + 1{,}5^2} = \sqrt{38\frac{1}{4}} \approx 6{,}18$ cm .

bladzijde 33

4a $BP = \sqrt{BR^2 + RS^2 + SP^2} = \sqrt{25+4+4} = \sqrt{33} \approx 5{,}7$; $PS = 2$ en
$PE = \sqrt{PS^2 + 5^2 + (4-2)^2} = \sqrt{4+25+4} = \sqrt{33} \approx 5{,}7$

b PS, want S is de loodrechte projectie van P op lijn BE.

c Het punt op AB dat het dichtst bij P ligt is punt R. De afstand van P tot AB is daarom de afstand van P tot R.

d Noem het midden van CD punt U, dan is punt U het punt op CD dat het dichtst bij punt P ligt, dus de afstand van P tot CD is de afstand van P naar U.
Driehoek PQU is een rechthoekige driehoek met $PQ = 2$ en $QU = 10$.
$PU = \sqrt{PQ^2 + QU^2} = \sqrt{104} \approx 10{,}2$ en dus is de afstand van P naar U ongeveer 10,2.

e Noem het midden van KL punt V, dan is punt V het punt op KL dat het dichtst bij punt P ligt, dus de afstand van P tot KL is de afstand van P naar V.
Dan ligt V 6 hoger dan P en ligt P 6 eenheden voor V. Dan is
$PV = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2} \approx 8{,}5$.

5a Punt S.

b Lijnstuk PS.

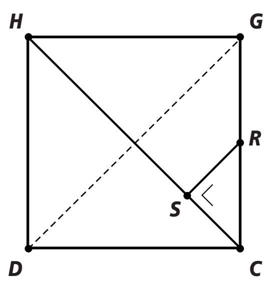
c In een zijaanzicht is de afstand van P tot vlak $CDHG$ zichtbaar. De afstand bedraagt $2 + 8 = 10$.

6a Lijnstuk GH.

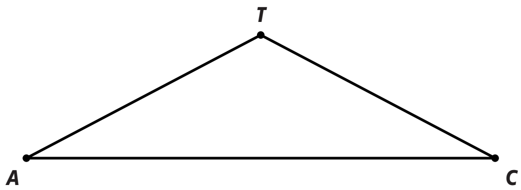
b De loodlijn van A op vlak $DCGH$ is lijnstuk AD, dus de afstand van A naar $DCGH$ is 4.

c De loodlijn van E op vlak $DBFH$ is lijnstuk EG. Noem het snijpunt tussen EG en HF punt Q, dan is de afstand van E tot $DBFH$ lijn EQ.
$EQ = \frac{1}{2} \cdot EG = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{EF^2 + FG^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4^2 + 4^2} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}8$.

d Noem het snijpunt van CH met de loodlijn vanuit R punt S.
Met gelijkvormigheid vind je dat $RS = \frac{1}{4} \cdot DG = \frac{1}{4} \cdot 4\sqrt{2} = \sqrt{2} \approx 1{,}4$.



7a

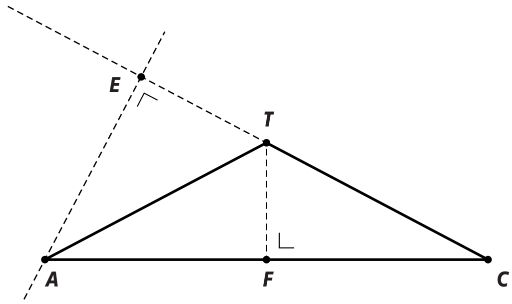


b Pythagoras: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$.
Cosinusregel: $AC^2 = AT^2 + CT^2 - 2 \cdot AT \cdot CT \cdot \cos \angle ATC$

$\cos \angle ATC = \dfrac{AT^2 + CT^2 - AC^2}{2 \cdot AT \cdot CT} = \dfrac{4^2 + 4^2 - 50}{2 \cdot 4 \cdot 4} = -0,5625 \;\Rightarrow\; \angle ATC \approx 124°$

c Het snijpunt van de loodlijn van A op het verlengde van CT ligt buiten de piramide, en de afstand van A tot dit snijpunt is de afstand van A tot CT.

d Noem het snijpunt van de loodlijn uit A op het verlengde van CT punt E,
dan is $\triangle ACE$ een rechthoekige driehoek.
Omdat $\angle ACE = \frac{1}{2}(180° - \angle ATC) \approx 27,9°$
is $AE = AC \cdot \sin \angle ACE \approx \sqrt{50} \cdot \sin(27,896°) \approx 3,31$.
De afstand van A tot CT is dus 3,31.

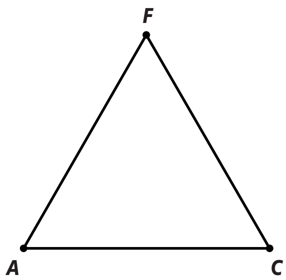


2.2 De afstand tot een lijn

bladzijde 34

8a Pythagoras: $AC = CF = AF = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} \approx 5,66$.

b



c Driehoek ACF is gelijkbenig en dus is de zwaartelijn vanuit F ook de hoogtelijn.

d $\triangle BMF$ is een rechthoekige driehoek. $BF = 4$ en $BM = \frac{1}{2} \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}$.
Pythagoras: $FM = \sqrt{BF^2 + BM^2} = \sqrt{4^2 + 8} = \sqrt{24} \approx 4,90$.

9a Lijnstuk AB.

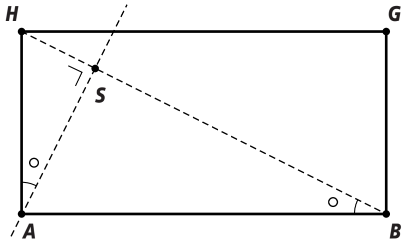
b Lijnstuk AH.

c $AH = \sqrt{AE^2 + EH^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

d De loodlijn van A op CG is AC en $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{116} \approx 10,8$.

10a Punt A en lijn HB liggen beiden in vlak $ABGH$.

b,c



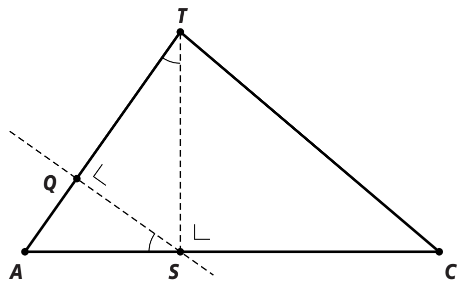
d In driehoek ABH geldt $HB \cdot AS = AB \cdot AH \Rightarrow \sqrt{100+25} \cdot AS = 10 \cdot 5$ en dus is $AS = \dfrac{50}{\sqrt{125}} \approx 4,47$, de afstand van A tot HB.

bladzijde 35

11a Punt S en lijn AT liggen beiden in het vlakdeel ACT.
In de tekening is punt Q het snijpunt van de loodlijn vanuit S en AT.
Dan geldt $\angle AQS = \angle AST = 90°$ en $\angle TAS = \angle SAQ$.
Dan is $\triangle AST \sim \triangle AQS$ en dus

$$\frac{ST}{QS} = \frac{AT}{AS} \Rightarrow \frac{6}{QS} = \frac{\sqrt{36+18}}{3\sqrt{2}}.$$

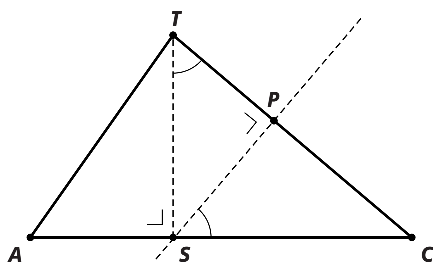
Uit dit laatste volgt $QS = \dfrac{18\sqrt{2}}{\sqrt{54}} \approx 3,46$.



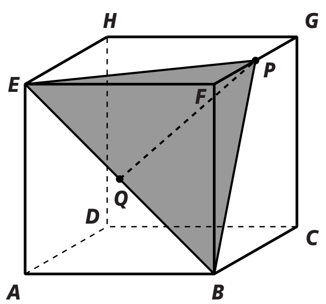
b In het grondvlak geldt $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{128} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.
Dus $SC = AC - AS = 8\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

c Punt P is het snijpunt van de loodlijn vanuit S en CT.
Dan geldt $SC \cdot ST = CT \cdot SP$ en
dus $5\sqrt{2} \cdot 6 = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 + 6^2} \cdot SP \Leftrightarrow 30\sqrt{2} = SP \cdot \sqrt{86}$.

De afstand tussen S en CT is. $SP = \dfrac{30\sqrt{2}}{\sqrt{86}} \approx 4,57$.



12a



Pythagoras: $BE = \sqrt{AB^2 + AE^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128} \approx 11,3$ en
$BP = EP = \sqrt{EF^2 + FP^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} \approx 8,94$.

b $\triangle BEP$ is een gelijkbenig driehoek. De loodlijn vanuit P snijdt BE in Q, het midden van BE. $\triangle BQP$ is een rechthoekige driehoek dus is de afstand van P tot BE
$PQ = \sqrt{BP^2 - (\frac{1}{2}BE)^2} = \sqrt{BP^2 - \frac{1}{4}BE^2} = \sqrt{80 - 32} \approx 6,93$.

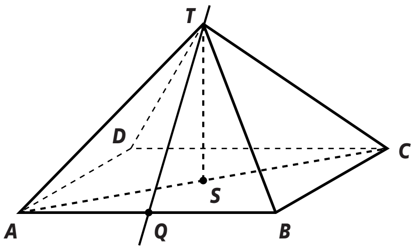
c Oppervlakte $= \frac{1}{2} \times \text{basis} \times \text{hoogte} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot PQ \approx \frac{1}{2} \cdot 11,3 \cdot 6,93 \approx 39,15$.

d Oppervlakte $= \frac{1}{2} \times \text{basis} \times \text{hoogte}$, het maakt niet uit welke zijde je als basis kiest mits je de bijbehorende hoogte gebruikt. Bij opdracht c is als basis BE genomen en als hoogte PQ, maar je mag ook als basis BP kiezen en als hoogte de afstand van E tot BP.

e De oppervlakte van $\triangle BEP$ is 39,15 en de lengte van $BP \approx 8{,}94$.

Dus de afstand van E tot BP is $\frac{2 \cdot \text{Oppervlakte}}{BP} \approx \frac{2 \cdot 39{,}15}{8{,}94} \approx 8{,}76$.

13a Noem het punt recht onder T punt S.
Punt S is ook het snijpunt van de diagonalen van het grondvlak.



$AS = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{36^2 + 36^2} = 18\sqrt{2}$ m.

In $\triangle AST$ geldt

$AT = \sqrt{AS^2 + ST^2} = \sqrt{(18\sqrt{2})^2 + 22^2} = \sqrt{1132} \approx 33{,}6$ m

De andere ribben hebben dezelfde lengte.

b Noem het midden van AB punt Q. Omdat ΔABT een gelijkbenige driehoek is geldt dat de loodlijn vanuit T in Q terecht komt.

$\triangle BQT$ is een rechthoekige driehoek en

$QT = \sqrt{BT^2 - BQ^2} = \sqrt{1132 - 18^2} = \sqrt{808} \approx 28{,}43$ m.

Oppervlakte $\triangle ABT = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot QT = \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot \sqrt{808} = 18\sqrt{808}$ m^2.

Noem het snijpunt van de loodlijn vanuit A op zijde TB punt P.

Dan is ook: Oppervlakte $\triangle ABT = \frac{1}{2} \cdot BT \cdot AP$, dus

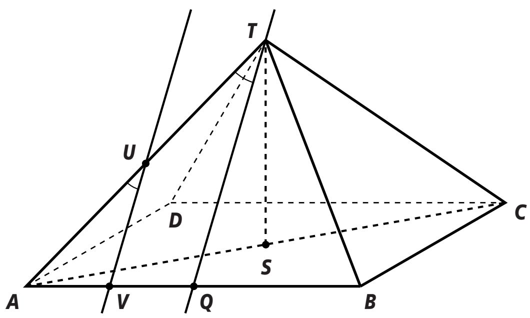
$AP = \frac{2 \cdot \text{Oppervlakte}}{BT} = \frac{2 \cdot 18\sqrt{808}}{\sqrt{1132}} \approx 30{,}41$ m.

A ligt op 30,41 m van zijde BT.

c Vlak QST staat loodrecht op AB, dus QST is een standvlak en $\angle SQT$ de bijbehorende standhoek. $\tan \angle SQT = \frac{ST}{QS} = \frac{22}{18} \Rightarrow \angle SQT = \tan^{-1} \frac{22}{18} \approx 50{,}7°$.

Dus de zijvlakken maken een hoek van 50,7° met het grondvlak.

d Noem het punt halverwege AT punt U. Het water stroomt langs een rechte lijn naar beneden, dus langs de loodlijn UV op AB. Dan lopen TQ en UV evenwijdig.



Dan is $\triangle AUV \sim \triangle AQT$. Omdat $AU = \frac{1}{2} AT$ is de vergrotingsfactor tussen beide driehoeken $\frac{1}{2}$.

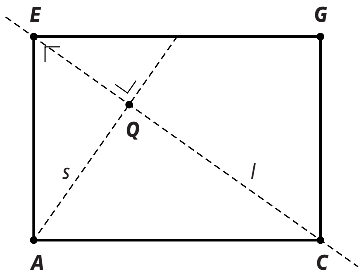
$VU = \frac{1}{2} \cdot QT = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{808} \approx 14{,}21$ m. Het water laat een spoor van 14,21 m achter.

2.3 Punt en vlak

bladzijde 36

14a De afstand van E tot het grondvlak is 2.
b De afstand van E tot $RSMN$ is 4.
c De afstand van E tot AH is $\frac{1}{2}ED = \frac{1}{2}\sqrt{DA^2 + AE^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \approx 1{,}41$
d Als je een loodlijn neerlaat vanuit E op vlak $ABMN$ dan kom je op lijnstuk AH terecht.
e De projectie van E op het vlak $CQPD$ is punt D en $ED = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$.

15a HF staat loodrecht op $ACGE$.
b Lijn AM is de snijlijn van V en $ACGE$.
c

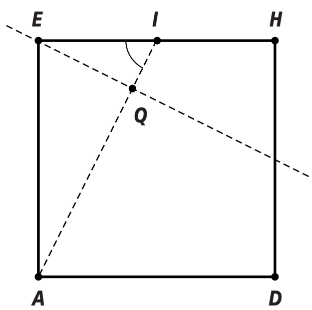


d Lijn l staat loodrecht op lijn s in V. Lijn l ligt in vlak $ACGE$ en dit vlak staat loodrecht op lijn HF in vlak V. Dus lijn l staat loodrecht op HF. Dus l staat loodrecht op twee snijdende lijnen in V en dus staat l loodrecht op V.
e Het snijpunt van l en s is punt Q. In driehoek AEM geldt: $EA \cdot EM = AM \cdot EQ$.

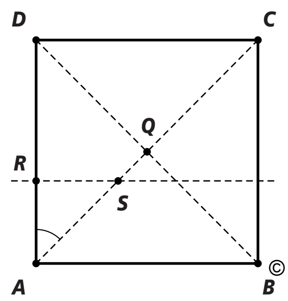
$$4 \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{24} \cdot EQ \Rightarrow EQ = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{24}} \approx 2{,}31$$

bladzijde 37

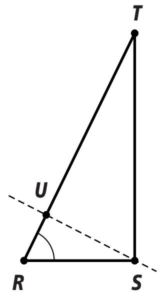
16 $AE \cdot EI = AI \cdot EQ \Rightarrow 4 \cdot 2 = \sqrt{20} \cdot EQ$ en dus is $EQ = \frac{8}{\sqrt{20}} \approx 1{,}79$.



17a De afstand is de lengte van BQ als Q het snijpunt van de diagonalen van het grondvlak is.
$BQ = \frac{1}{2}\sqrt{BA^2 + AD^2} = \frac{1}{2}\sqrt{8^2 + 8^2} = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \approx 5{,}66$.
b In het grondvlak gaat het dan om de lengte van SR, de afstand van S naar AD.
Met gelijkvormigheid vind je dat $SR = \frac{3}{8} \cdot CD = \frac{3}{8} \cdot 8 = 3$.



c In $\triangle RST$ gaat het dan om de afstand van S tot RT.
Er geldt $RT = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45}$ en $RS \cdot ST = RT \cdot US$.
Dus $3 \cdot 6 = \sqrt{45} \cdot US \Rightarrow US = \dfrac{18}{\sqrt{45}} \approx 2,68$



18a Voor het volume V van een piramide geldt: $V = \frac{1}{3} \cdot \text{grondvlak} \cdot \text{hoogte}$. Kies als grondvlak $\triangle ABD$, de hoogte is dan AE. Oppervlakte $\triangle ABD = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18$ en inhoud $ABDE \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 6 = 36$.

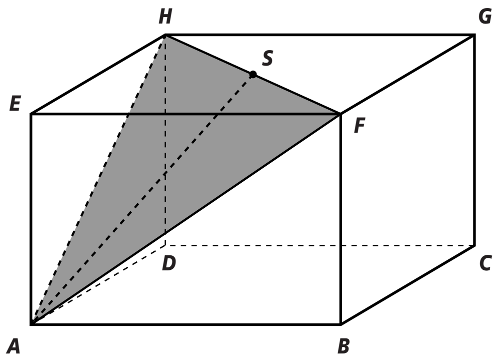
b Omdat $ABDE, CBDG, FEGB$ en $HEGD$ alle vier van dezelfde vorm en afmetingen hebben geldt:
Volume $ABDE$ = volume $CBDG$ = volume $FEGB$ = volume $HEGD = 36$.
Het volume kubus $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$, dus volume $BDEG = 216 - 4 \cdot 36 = 72$.

c Noem het midden van BD punt S, de oppervlakte van $\triangle BDE$ is dan: $\frac{1}{2} \cdot BD \cdot SE$.
$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$. Omdat $BE = BD$ en $BS = \frac{1}{2} \cdot BD = 3\sqrt{2}$ krijgen je:
$SE = \sqrt{BE^2 - BS^2} = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 - (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{54}$, waaruit volgt:
Oppervlakte $\triangle BDE = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot SE = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot \sqrt{54} = 3\sqrt{108} \approx 31{,}18$.

d Volume $BDEG = \frac{1}{3} \cdot \text{oppervlakte grondvlak} \cdot \text{hoogte} = 72 \Rightarrow$

$$\text{hoogte} = \frac{3 \cdot \text{Volume } BDEG}{\text{oppervlakte grondvlak}} = \frac{3 \cdot 72}{3\sqrt{108}} \approx 6,93$$

19a



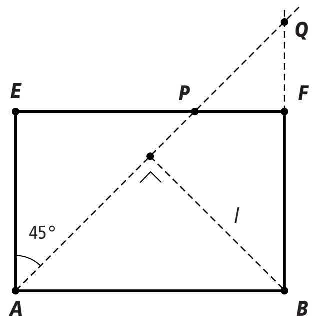
Volume $AEFH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot EF \cdot AE \cdot EH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot 6 = 24$
Stel S is het midden van HF. Dan is oppervlakte $\triangle AFH = \frac{1}{2} \cdot HF \cdot AS$.
Omdat $HF = \sqrt{HE^2 + EF^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$ dus is $SF = \frac{1}{2} \cdot HF = 3\sqrt{2}$.
Verder is $AF = \sqrt{AE^2 + EF^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52}$ en is
$AS = \sqrt{AF^2 - FS^2} = \sqrt{52 - 18} = \sqrt{34}$.
Dus oppervlakte $\triangle AFH = \frac{1}{2} \cdot HF \cdot AS = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{72} \cdot \sqrt{34} \approx 24,74$.
Volume $AEFH = \frac{1}{3} \cdot \text{oppervlakte } \triangle AFH \cdot \text{hoogte} = 24 \Rightarrow$

$$\text{hoogte} = \frac{3 \cdot \text{Volume } BDEG}{\text{opp. } \triangle AFH} \approx \frac{3 \cdot 24}{24,74} \approx 2,91$$

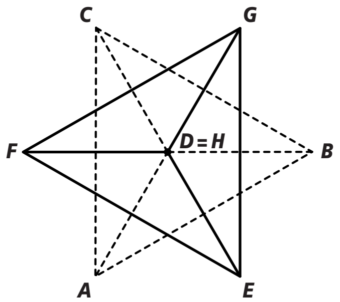
b De gezochte hoek is $\angle CAS$. Er geldt $\tan \angle CAS = \dfrac{4}{\frac{1}{2}AC} = \dfrac{4}{3\sqrt{2}} \Rightarrow \angle TAS \approx 43,3°$.

c Uit de symmetrie van de balk in het vlak $BFHD$ volgt dat $\angle CAS = \angle ACS \approx 43,3°$.
Dus $\angle ASC = 180° - \angle CAS - \angle ACS \approx 93,4°$. De (scherpe) hoek tussen beide vlakken is 86,6°.

d Teken het voorvlak met punten P.
Laat Q het snijpunt zijn van AP en BF.
Dan is $AQ = 6\sqrt{2}$ en er geldt $AB \cdot BQ = AQ \cdot l$
dus $6 \cdot 6 = 6\sqrt{2} \cdot l \Rightarrow l = \dfrac{36}{6\sqrt{2}} \approx 4{,}24$
De afstand van B tot het vlak ADP is ongeveer 4,24.



20a



b Het grondvlak van het doosje waar het tafeltje in verpakt wordt is een zeshoek.
Omdat $\angle FDA = 60°$ en $FD = AD$ is driehoek AFD gelijkzijdig.
$\sin \angle FDA = \dfrac{\frac{1}{2}FE}{FD} \Rightarrow FD = \dfrac{27}{\sin 60°} \approx 31{,}2$
De zijde van de zeshoek is dus 31,2 cm^2.
De oppervlakte van één driehoek is dan $\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2}EF) \cdot AD \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 54 \cdot 31{,}2 \approx 421$ cm^2.
De oppervlakte van het grondvlak van de doos is dus $6 \cdot 421 \approx 2526$ cm^2.

c De afstand van A tot ribbe BC is de hoogtelijn van de gelijkzijdige driehoek ABC met zijde 54. Deze hoogtelijn is gelijk aan $\sqrt{54^2 - 27^2} = \sqrt{2187} \approx 46{,}8$ cm.
d(A, BC) 46,8 cm.

d Noem het midden van ribbe BC punt M. De projectie van punt D op het grondvlak
De hoogte van piramide $D.ABC$ is dan
$\sqrt{DM^2 - (\frac{1}{3}AM)^2} = \sqrt{2187 - 243} = \sqrt{1944} \approx 44{,}1$ cm.
Het punt D ligt dus 50 – 44,1 = 5,9 cm onder het tafelblad een het punt H ligt dus 5,9 cm boven de grond.
De kabel DH heeft dan een lengte van 44,1 – 5,9 = 38,2 cm.

2.4 Lijn en vlak

bladzijde 38

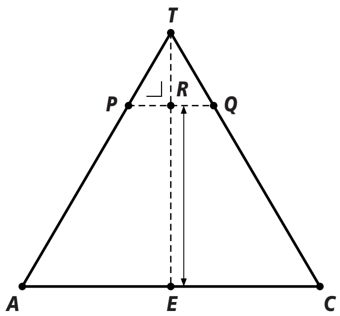
21a Lijn AE is evenwijdig aan lijn FB en FB ligt in vlak $DBFH$.
Omdat lijn AE niet in vlak $DBFH$ ligt, is AE evenwijdig met $DBFH$.

b Lijn AE is evenwijdig met vlak $DBFH$, dus de afstand van elk punt op AE tot het vlak $DBFH$ is gelijk. In plaats van het berekenen van de afstand van P tot $DBFH$ kunnen je de afstand h van E tot FH in het bovenvlak berekenen. Dan geldt $EF \cdot EH = HF \cdot h$ en $HF = 10$ en dus geldt $8 \cdot 6 = 10h \Rightarrow h = 4{,}8$.

c De afstand van de lijn AE tot $DBFH$ is 4,8.

22a In het vlakdeel ACT zijn driehoek ACT en driehoek PQT gelijkvormig en dus is PQ evenwijdig aan AC. En dus is PQ evenwijdig het grondvlak $ABCD$.

b



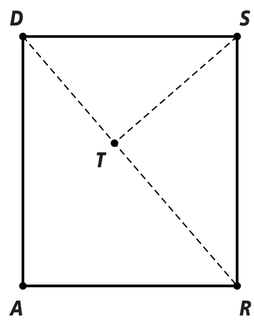
c Het punt R, het midden van PQ. Het midden van AC noem je E.
Dan is $\triangle AET \sim \triangle PRT$ en omdat $PT = \frac{2}{7}AT$ is $\frac{2}{7}$ de vergrotingsfactor van $\triangle AET$ naar $\triangle PRT$.
Pythagoras: $AE = \frac{1}{2} \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{AB^2 + BC^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5^2 + 5^2} = \frac{1}{2}\sqrt{50}$.
Nogmaals Pythagoras, nu in vlak ACT, geeft:
$ET = \sqrt{AT^2 - AE^2} = \sqrt{7^2 - \frac{1}{4} \cdot 50} = \sqrt{36{,}5} \approx 6{,}04$.
Dan is $RT = \frac{2}{7} \cdot ET \approx \frac{2}{7} \cdot 6{,}04 \approx 1{,}73$ en $ER = \frac{5}{7} \cdot ET = \frac{5}{7} \cdot 6{,}04 \approx 4{,}31$.
Dus de afstand van PQ tot $ABCD$ is ongeveer 4,31.

bladzijde 39

23a Lijn BE is evenwijdig met vlak $ACFD$. Bereken in het bovenvlak de afstand van E tot DF. ΔDEF is een gelijkzijdige driehoek met zijden $2\sqrt{3}$.
Noem het midden van DF punt P dan is EP de afstand van E naar $ACFD$.
$DP = \frac{1}{2}DF = \frac{1}{2}2\sqrt{3} = \sqrt{3}$ en (Pythagoras)
$EP = \sqrt{ED^2 - DP^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - \sqrt{3}^2} = \sqrt{4 \cdot 3 - 3} = 3$
Dus de afstand van BE naar $ACFD$ is 3.

b Punt S, het midden van EF.

c Laat vanuit S de loodlijn op het vlak BCD neer.
Het snijpunt van deze loodlijn en BCD is punt T.
Het midden van BC noem je R.
Omdat $\triangle DEF$ gelijkzijdig is geldt $EP = DS = 3$.
Het prisma heeft een hoogte van 4, dus $SR = 4$.
Uit opdracht a volgt dat $DS = 3$. Ook is $DR = 5$.
Omdat $DS \cdot SR = RD \cdot ST$ geldt $3 \cdot 4 = 5 \cdot ST$ dus is $ST = 2{,}4$.
De afstand van lijn EF tot vlak BCD is 2,4.



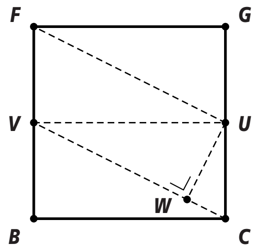
24a Laat vanuit P een loodlijn neer op het vlak $ADRS$. Noem het snijpunt van deze loodlijn met AS punt K, dan is KP de afstand van punt P tot vlak $ADRS$. Dan is $AS = 5$ en geldt $AP \cdot PS = AS \cdot KP$. Uit $3 \cdot 4 = 5 \cdot KP \Rightarrow KP = 2{,}4$.
Dus de afstand van P naar het vlak $ADRS$ is 2,4.

b Laat vanuit S een loodlijn neer op het vlak $PQGF$. Noem het snijpunt van deze loodlijn met PF punt L, dan is LS de afstand van punt S tot vlak $PQGF$. Je krijgt dan dezelfde situatie als in opdracht a. Dus de afstand van S naar vlak $PQGF$ is 2,4.

c Merk op dat AS evenwijdig loopt aan PF. De afstand tussen deze twee lijnen is dus gelijk. Vanuit S een loodlijn neerlaten op PF geeft dezelfde afstand als vanuit T een loodlijn neerlaten op AS. Dus $TM = SL = 2{,}4$.

d De lijnen AS en PF lopen evenwijdig, de afstand tussen deze twee lijnen is daarom overal hetzelfde. Omdat deze lijnen ook nog in het vlak ABFE liggen met het vlak ABFE loodrecht de beide vlakken ADRS en PQGF geldt dat de afstand van elk punt op AS tot vlak $PFGQ$ gelijk is en bovendien ook gelijk is aan de afstand van elk punt op PF tot vlak $ADRS$.

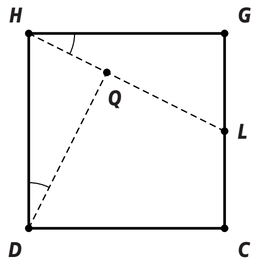
e Ook dit zijn weer twee evenwijdige vlakken.
In het zijvlak $BCGF$ krijg je de volgende tekening.
Je moet dan de lengte van UW berekenen.
Er geldt $VC \cdot UW = UC \cdot UV$.



Dus is $\sqrt{4^2+2^2} \cdot UW = 2 \cdot 4 \Rightarrow UW = \dfrac{8}{\sqrt{20}} \approx 1,79$

Dus de afstand tussen de vlakken CTD en EFU is 1,79.

25a Vanuit D een loodlijn neerlaten op het vlak EKL geeft DQ.
In het vlakdeel $CDHG$ geeft dit de volgende situatie.
Om DQ te bepalen maak je gebruik van gelijkvormigheid.
Merk op dat $\angle DHG = \angle HGL = 90°$.
Ook geldt $\angle QDH = 90° - \angle QHD$. Maar ook $\angle GHL = 90° - \angle QHD$.
Dus ook geldt $\angle QDH = \angle GHL$. Dus geldt $\triangle QHD \sim \triangle GLH$.
$LH = \sqrt{LG^2 + GH^2} = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20}$.



Dan geldt de verhoudingstabel:

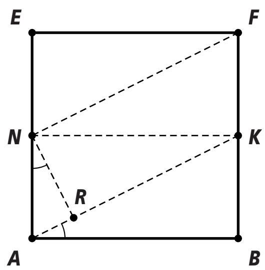
$\triangle QHD$	$HD = 4$	DQ	HQ
$\triangle GLH$	$LH = \sqrt{20}$	$HG = 4$	LG

Dus $\dfrac{DQ}{HG} = \dfrac{HD}{LH} = \dfrac{4}{\sqrt{20}} \quad \Rightarrow \quad DQ = \dfrac{4}{\sqrt{20}} \cdot HG = \dfrac{4}{\sqrt{20}} \cdot 4 = \dfrac{16}{\sqrt{20}} \approx 3,58$.

De afstand van punt D tot vlak EKL is 3,58.

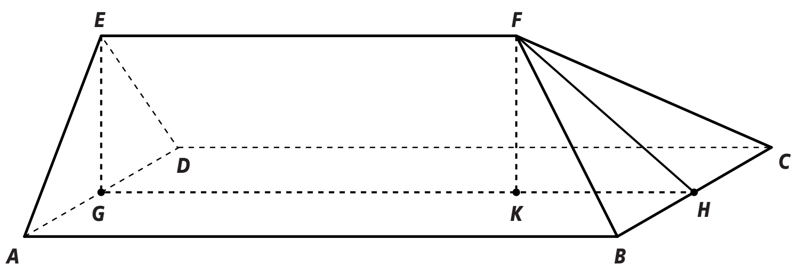
b De hoogte van het op tafel gelegde middelste stuk is de afstand van vlak AKL tot vlak NFG.
Kies lijn FN in het vlak NFG om de afstand tussen de vlakken AKL en NFG te berekenen.
In het vlakdeel $ABFE$ geeft dit de tekening hiernaast.
Dan geldt $AK \cdot NR = AN \cdot NK \Rightarrow \sqrt{20} \cdot NR = 2 \cdot 4$

zodat $NR = \dfrac{8}{\sqrt{20}} \approx 1,79$.



De hoogte van dit deel van de balk is 1,79.

26a De afstand van lijn EF tot vlak $ABCD$ is de hoogte van de zolderverdieping. Lijn EF loopt evenwijdig aan vlak $ABCD$.



In het zijvlak ADE geeft Pythagoras $EG = \sqrt{AE^2 - AG^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} \approx 2,65$ m .
Dus de zolderverdieping is 2,65 m hoog.

b De "schuinheid" van een vlak wordt bepaald door de hoek waaronder het vlak het grondvlak $ABCD$ snijdt.
De standhoek van vlak $ABFE$ is $\angle DAE$, de standhoek van vlak $CDEF$ is $\angle ADE$.

Omdat $\triangle ADE$ een gelijkbenige driehoek is geldt $\angle DAE = \angle ADE = \tan^{-1} \dfrac{EG}{3}$.

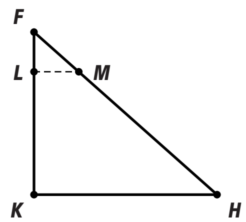
Noem het midden van BC punt H. Laat vanuit F een loodlijn op het grondvlak $ABCD$ neer. Deze loodlijn snijdt GH in het punt K.

De standhoek is dan $\angle KHF$. Omdat $KH = 10 - 7 = 3$ is $\tan \angle KHF = \dfrac{KF}{KH} = \dfrac{EG}{3}$.

Dus $\angle DAE = \angle ADE = \angle KHF$ en dus lopen alle drie de schuine vlakken staan even schuin.

c Het deel dat onder de lijn EF ligt heeft inhoud
$\frac{1}{2} \cdot \text{lengte} \cdot \text{breedte} \cdot \text{hoogte} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 6 \cdot \sqrt{7} \approx 55,7 \text{ m}^3$
Het deel dat onder het vlakdeel BCF ligt heeft de vorm van een piramide, dus voor de volume geldt $\frac{1}{3} \cdot \text{lengte} \cdot \text{breedte} \cdot \text{hoogte} = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \sqrt{7} \approx 15,9 \text{ m}^3$.
Dus het totale volume $V \approx 55,7 + 15,9 = 71,6 \approx 72 \text{ m}^3$.

d De lengte van de waslijn berekenen we in twee delen: het gedeelte dat onder lijn EF hangt en het gedeelte dat onder het vlakdeel BCF hangt.
Het gedeelte dat onder EF hangt heeft een lengte van 7 meter.
Het gedeelte dat onder BF hangt kunnen je berekenen in $\triangle KHF$
Hierbij ligt lijnstuk LM twee meter boven KH.
Dan is $\triangle KHF \sim \triangle LMF$ en geldt de verhoudingstabel:

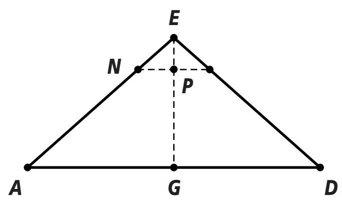


$\triangle LMF$	$FL \approx 2,65 - 2 = 0,65$	LM	FM
$\triangle KHF$	$FK = 2,65$	$KH = 3$	FH

Dus $\dfrac{LM}{KH} = \dfrac{FL}{FK} = \dfrac{0,65}{2,65} \Rightarrow LM = \frac{0,65}{2,65} \cdot KH = \frac{0,65}{2,65} \cdot 3 = 0,736$.

In totaal heeft de waslijn dus lengte $7 + 0,736 \approx 7,74 \text{ m}$.

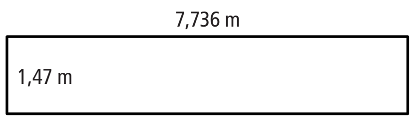
e Met $LM = 0,736 \text{ m}$ kunnen je een dwarsdoorsnede van het dak tekenen op twee meter hoogte.
Deze doorsnede heeft een lengte van ongeveer $7,736 \text{ m}$, de breedte moet je nog berekenen.
Gebruik vlakdeel ADE.
De punten N en P zijn de snijpunten van een lijn die twee meter boven AD loopt met respectievelijk de lijnen AE en GE.
Dan is $\triangle AGE \sim \triangle NPE$ en geldt de verhoudingstabel:



$\triangle NPE$	$EP \approx 2,65 - 2 = 0,65$	NR	EN
$\triangle AGE$	$EG = 2,65$	$AG = 3$	EA

Dus $\dfrac{NP}{AG} = \dfrac{EP}{EG} = \dfrac{0,65}{2,65} \Rightarrow NP = \frac{0,65}{2,65} \cdot AG = \frac{0,65}{2,65} \cdot 3 = 0,736$.

De breedte op 2 meter hoogte bedraagt dus $2 \cdot 0,736 \approx 1,47 \text{ m}$.
Dit geeft als doorsnede van het dak op twee meter hoogte:



Een waslijn met maximale lengte d is een diagonaal van deze rechthoek.
Pythagoras: $d = \sqrt{7,736^2 + 1,47^2} \approx 7,87 \text{ m}$.
De langst mogelijke waslijn heeft lengte 7,87 m.

2.5 Gemengde opdrachten

bladzijde 40

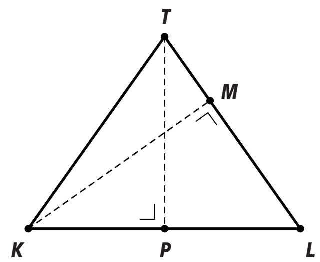
27a Noem het snijpunt van de diagonalen AC en BD punt P.
Dan is $AP = \frac{1}{2} \cdot AC = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{18}$.
En $UP = PT = \sqrt{AT^2 - AP^2} = \sqrt{6^2 - 18} = \sqrt{18}$.
Dus is $UT = UP + PT = 2 \cdot \sqrt{18} \approx 8,49$.

b Laat vanuit S de loodlijn op het vlak TBD neer. Noem het snijpunt van deze loodlijn en PT punt Q, dan is de afstand van S tot vlak TBD de lengte van QS.
Omdat $\triangle PCT \sim \triangle QST$ geldt de verhoudingstabel:

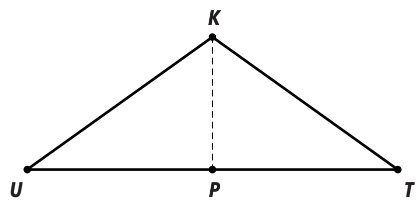
$\triangle QST$	$ST = 3$	QS	QY
$\triangle PCT$	$CT = 6$	$PC = AP = \sqrt{18}$	PT

Dus $\dfrac{QS}{PC} = \dfrac{ST}{CT} = \dfrac{3}{6} \Rightarrow QS = \frac{1}{2} \cdot PC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{18} \approx 2,12$.
De afstand van S tot vlak TBD is 2,12.

c Noem de middens van AD en BC respectievelijk K en L.
Laat vanuit K een loodlijn op het vlak BCT neer,
deze loodlijn snijdt het vlak in M, M ligt op lijn LT.
Licht het vlakdeel KLT uit de figuur.
Dan geldt $KL \cdot TP = TL \cdot KM$ en dus
is $6 \cdot \sqrt{18} = \sqrt{27} \cdot KM \Rightarrow KM = \dfrac{6\sqrt{18}}{\sqrt{27}} \approx 4,90$



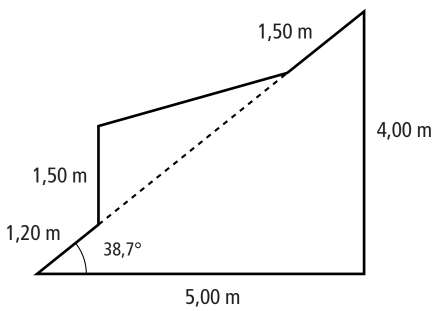
d De vlakken snijden elkaar in lijn AD.
Een standvlak is vlak UTK,
de bijbehorende standhoek is $\angle UKT$.
Licht het vlakdeel UTK uit de figuur.
In opdracht a is $UT = 2\sqrt{18} = 6\sqrt{2}$ berekend.
In opdracht c is $UK = KT = LT = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ gevonden.
Cosinusregel: $UT^2 = KT^2 + KU^2 - 2 \cdot KT \cdot KU \cdot \cos\angle UKT$



$$\angle UKT = \cos^{-1}\left(\frac{KT^2 + KU^2 - UT^2}{2 \cdot KT \cdot KU}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{27 + 27 - 72}{2 \cdot \sqrt{27} \cdot \sqrt{27}}\right) = \cos^{-1}(-\tfrac{1}{3}) \approx 109,47° .$$

28a Noem de hoek die het dak met de horizontaal maakt α, dan vind je in een zijaanzicht dat $\tan\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \approx 38,7°$.

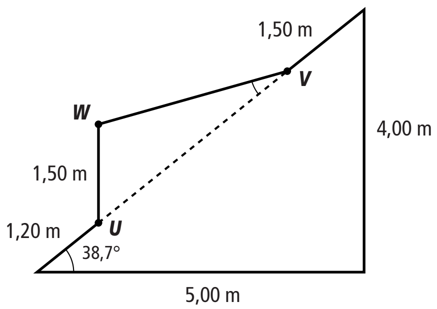
b



c Pythagoras geeft dat de lengte van het hele dak $\sqrt{5,00^2 + 4,00^2} = \sqrt{41} \approx 6,40$ m .
De dakkapel begint op 1,20 m van de dakrand en 1,50 m van de nok, dus
$MN = 6,40 - 1,20 - 1,50 = 3,70$ m .

d Trek vanuit punt C een verticale lijn naar beneden en noem het snijpunt van deze lijn met AB punt Q. Dan is $BQ = BM - QM = 2,50 - 1,50 = 1,00$ m.
Er geldt $FQ = MN = 3,70$ m, dus Pythagoras geeft
$BF = \sqrt{FQ^2 + QB^2} = \sqrt{3,70^2 + 1,00^2} \approx 3,84$ m.

e De hoek die de dakkapel maakt met het horizontale vlak is de hoek van het dakvlak met het horizontale vlak minus de hoek van de dakkapel met het dak. Hieronder is het zijaanzicht opnieuw getekend en hebben de hoekpunten een letter gekregen. De hoek die de dakkapel maakt het de dak is $\angle UVW$. Als alle zijden bekend zijn kun je met de cosinusregel de hoek berekenen.

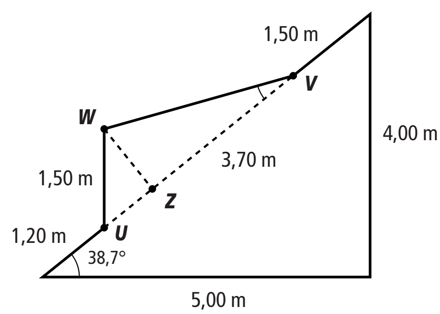


Bereken eerst de lengte van $VW = CF$
In ΔCBF kun je met Pythagoras CF berekenen. Bij opdracht b is berekend dat $BF = 3,84$ m. Verder is $CB = \sqrt{CQ^2 + QB^2} = \sqrt{1,50^2 + 1,00^2} \approx 1,80$ m en dus is $CF = \sqrt{BF^2 - CB^2} \approx \sqrt{3,84^2 - 1,80^2} \approx 3,39$ m en dus $VW \approx 3,39$ m.
Cosinusregel: $UW^2 = UV^2 + VW^2 - 2 \cdot UV \cdot VW \cdot \cos\angle UVW$

geeft $\angle UVW = \cos^{-1}\left(\dfrac{UV^2 + VW^2 - UW^2}{2 \cdot UV \cdot VW}\right) \approx \cos^{-1}\left(\dfrac{3,70^2 + 3,39^2 - 1,50^2}{2 \cdot 3,70 \cdot 3,39}\right) \approx 24,0°$.

Dus het dak van de dakkapel maakt een hoek van $38,7° - 24,0° = 14,7°$ met het horizontale vlak.

f Bereken eerst het volume onder het rechthoekige vlakdeel $CDEF$. Om de te kunnen berekenen heb je de afstand van CD tot het dakvlak nodig.
Laat vanuit C een loodlijn op het dakvlak neer.
Noem het snijpunt van deze loodlijn met het dakvlak punt Z.
Gebruik het zijaanzicht om de lengte van WZ te berekenen.



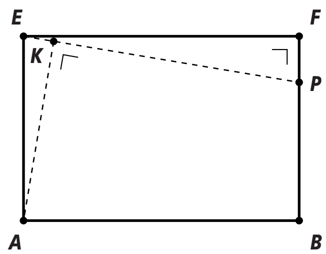
Dan geldt $\sin\angle ZVW = \dfrac{WZ}{VW}$ en dus is
$WZ = \sin\angle ZVW \cdot VW \approx \sin 24° \cdot 3,39 \approx 1,38$ m.
Het volume onder $CDEF$ is dan
$\frac{1}{2} \cdot \text{lengte} \cdot \text{breedte} \cdot \text{hoogte} = \frac{1}{2} \cdot UV \cdot CD \cdot WZ \approx \frac{1}{2} \cdot 3,70 \cdot 3,00 \cdot 1,38 = 7,659 \text{ m}^3$.
Het volume onder het vlakdeel BCF heeft de vorm van een piramide, het volume onder vlakdeel ADE is even groot.
Dus volume BCF + volume $ADE = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \text{lengte} \cdot \text{breedte} \cdot \text{hoogte} \approx \frac{2}{3} \cdot 3,70 \cdot 1,00 \cdot 1,38 = 3,404 \text{ m}^3$.
Dus de totale toename van de inhoud is $7,659 + 3,404 \approx 11,1 \text{ m}^3$.

bladzijde 41

29a Als je vanuit A een loodlijn op vlak V neerlaat dan snijdt deze loodlijn het vlak V in een punt K van de lijn EP. Licht het vlakdeel $ABFE$ uit de figuur.
Er geldt $EP \cdot AK = AE \cdot AB$ dus

$\sqrt{37} \cdot AK = 4 \cdot 6 \Rightarrow AK = \frac{24}{\sqrt{37}} \approx 3{,}95$

De afstand van A tot vlak V bedraagt 3,95.



b Als de afstand van A tot vlak V en de afstand van F tot vlak V beiden gelijk zijn, dan ligt punt P op punt B.
In het voorvlak gaat het om de afstand h van A tot BE. Er geldt $BE = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$ en ook geldt $AB \cdot AE = BE \cdot h$. Dus geldt

$6 \cdot 4 = \sqrt{52} \cdot h \Rightarrow h = \frac{24}{\sqrt{52}} \approx 3{,}33$.

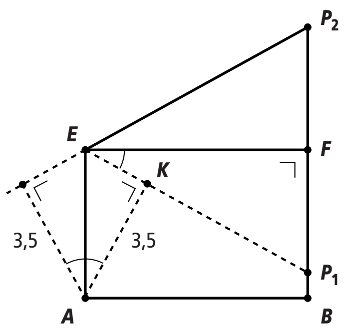
De afstand van A tot vlak V en de afstand van F tot vlak V bedraagt 3,33.

c De twee situaties waarin de afstand van A tot vlak V gelijk is aan 3,5 zijn in het voorvlak weergegeven.
Er moet gelden $AB \cdot AE = EP_1 \cdot AK \Rightarrow 6 \cdot 4 = EP_1 \cdot 3\frac{1}{2}$

en dus is $EP_1 = \frac{24}{3\frac{1}{2}} = \frac{48}{7}$.

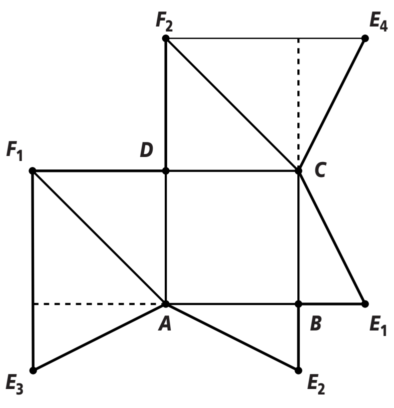
Met Pythagoras is $FP_1 = \sqrt{(\frac{48}{7})^2 - 6^2} \approx 3{,}32$ en is $BP_1 = 0{,}68$.

Omdat EP_2 het spiegelbeeld is van EP_1 in EF is $BP_2 = BF + FP_2 \approx 4 + 3{,}32 = 7{,}32$.



30a Laat vanuit E een loodlijn neer op DF en noem het snijpunt van deze loodlijn met DF punt Q.
$EQ = BD = \sqrt{BA^2 + AD^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} \approx 8{,}49$
$\triangle qEF$ is rechthoekig en dus is $EF = \sqrt{EQ^2 + QF^2} = \sqrt{72 + 3^2} = 9$.

b



c Eerst de zijden van $\triangle AEF$ berekenen.
$EF = 9$, $AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45}$ en
$AF = \sqrt{AD^2 + DF^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72}$.
Cosinusregel: $AE^2 = AF^2 + FE^2 - 2 \cdot AF \cdot FE \cdot \cos \angle AFE$.

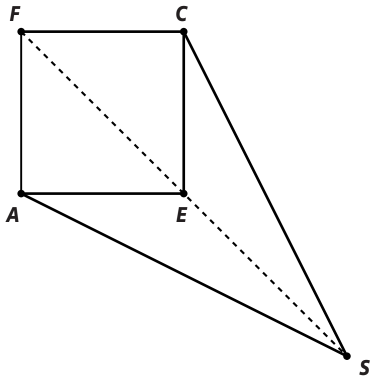
$$\angle AFE = \cos^{-1}\left(\frac{AF^2 + FE^2 - AE^2}{2 \cdot AF \cdot FE}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{72 + 9^2 - 45}{2 \cdot \sqrt{72} \cdot 9}\right) = \cos^{-1}\frac{108}{18 \cdot 6\sqrt{2}} = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = 45°.$$

d De gestippelde lijn in de bij b getekende uitslag is de kortste weg van A naar C via ribbe EF.
Uit de figuur volgt dat deze afstand 12 is. Het kan als volgt ook met een berekening.
Noem het snijpunt van de loodlijnen vanuit A op EF en vanuit C op EF punt P.

Dan volgt $\sin \angle AFE = \dfrac{AP}{AF} \Rightarrow AP = AF \cdot \sin \angle AFE = \sqrt{72} \cdot \sin 45° = 6$.

Omdat $EP = AP = 6{,}00$ cm is de afstand van A naar C via ribbe EF gelijk aan 12 cm.

e Met gelijkvormigheid vind je dat $DS = 2 \cdot DB = 2 \cdot 6\sqrt{2} = 12\sqrt{2} \approx 16{,}97$



f AS is een diagonaal in de rechthoek met zijden 6 en 12 waarvan A en S twee overstaande hoekpunten zijn. Dan is $AS = \sqrt{6^2 + 12^2} = \sqrt{180} \approx 13{,}42$.

g In $\triangle DSF$, een rechthoekige driehoek, geldt

$\tan \angle DSF = \dfrac{DF}{DS} = \dfrac{6}{12\sqrt{2}} \Rightarrow \angle DSF \approx 19{,}5°$.

Dus de lijn FS maakt een hoek van 19,5° met het grondvlak.

Test jezelf

bladzijde 44

T-1a Pythagoras $PF = \sqrt{EF^2 + EP^2} = \sqrt{10^2 + 9^2} = \sqrt{181} \approx 13{,}45$ m en
$PH = \sqrt{HE^2 + EP^2} = \sqrt{8^2 + 9^2} = \sqrt{145} \approx 12{,}04$ m.

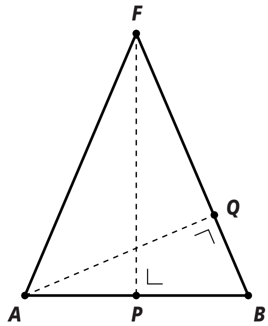
b De afstand tussen de twee antennes is
$EQ = \sqrt{EH^2 + HQ^2} = \sqrt{8^2 + 7^2} = \sqrt{113} \approx 10{,}63$ m.

c Het hoogteverschil tussen P en R is 4 meter en de afstand tussen de twee antennes is $\sqrt{113}$.
Dan is $PR = \sqrt{4^2 + 113} = \sqrt{129} \approx 11{,}36$ m.

d $RH = \sqrt{RQ^2 + QH^2} = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{74} \approx 8{,}60$ m en
$RF = \sqrt{FG^2 + GQ^2 + QR^2} = \sqrt{8^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{98} \approx 9{,}90$ m

T-2a De loodlijn vanuit punt D op lijn BC is DC, de afstand is $CD = \sqrt{CA^2 + AD^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

b $\triangle ABF$ is een gelijkbenige driehoek.
De loodlijn vanuit F snijdt AB daarom in het midden P van AB.
De afstand van F tot AB is FP.
En is $AF = \sqrt{AC^2 + CF^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{45}$ en
$AP = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + CB^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + 4^2} = 2\sqrt{2}$.
Omdat $\triangle APF$ een rechthoekige driehoek is volgt $FP = \sqrt{AF^2 - AP^2} = \sqrt{45 - 8} = \sqrt{37} \approx 6,08$.



c Laat vanuit A een loodlijn neer op lijn BF.
Noem het snijpunt van deze loodlijn met BF punt Q.
Dan geldt $AB \cdot FP = BF \cdot AQ$. Invullen geeft

$$4\sqrt{2} \cdot \sqrt{37} = \sqrt{52} \cdot AQ \Rightarrow AQ = \frac{4\sqrt{74}}{\sqrt{52}} \approx 4,77$$

Dus de afstand van A naar BF is ongeveer 4,77.

T-3a De punten B en E liggen op de lijn BE en deze lijn is evenwijdig met vlak $ACFD$.

b Een loodlijn vanuit B op vlak $ACFD$ is de lijn BC. Dus de afstand van B tot $ACFD$ is 4.

c De loodlijn vanuit C snijdt vlak $ABED$ in P, het midden van lijnstuk AB.
Omdat driehoek ACB een gelijkbenige rechthoekige driehoek is geldt
$CP = AP = \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \approx 2,82$.
Dus de afstand van C tot vlak $ABED$ is ongeveer 2,82.

d De afstand van S tot vlak $ACFD$ wordt gegeven door de lengte van lijnstuk CS.
Met gelijkvormigheid van $\triangle CSF$ en $\triangle BSE$ in het vlak $BEFC$ volgt dat
$CS = 1\frac{1}{2} \cdot CB = 1\frac{1}{2} \cdot 4 = 6$.
De afstand van punt S tot vlak $ACFD$ is 6.

bladzijde 45

T-4a Het verlengde van PM snijdt vlak $ABCD$. De afstand van PM tot vlak $ABCD$ is daarom 0.

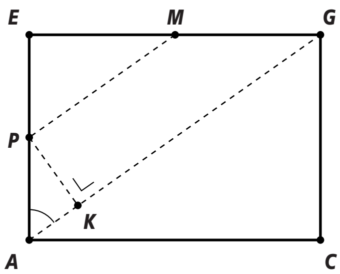
b Vlakdeel $ACGE$ want de lijnen PM en AG liggen beiden in het vlak $ACGE$, dus dit vlak kun je gebruiken om aan te tonen dat PM en AG evenwijdig lopen.

c Kies punt P om de afstand tot AG te berekenen.
Dan is $EG = \sqrt{EF^2 + FG^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$
en is $AG = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + 4^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.
Stel h is de afstand van E tot AG.
Dan geldt $AG \cdot h = AE \cdot EG$.

Invullen geeft $4\sqrt{3} \cdot h = 4 \cdot 4\sqrt{2} \Rightarrow h = \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

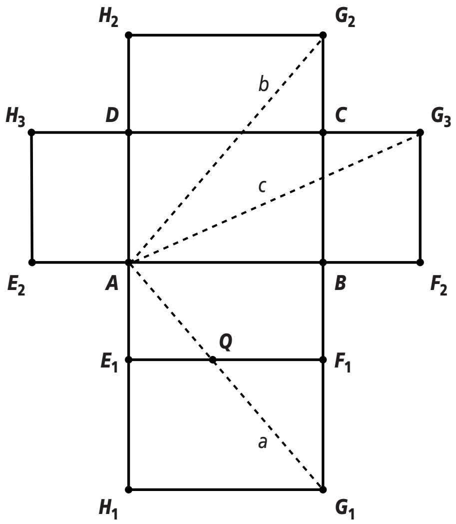
Dan is $PK = \frac{1}{2}h = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \approx 1,63$.

Dus de afstand van lijn PM tot vlak $AQGR$ is 1,63.



T-5a Pythagoras geeft $AQ = \sqrt{AE^2 + EQ^2} = \sqrt{15^2 + x^2}$.
Omdat $QF = EF - EQ = 30 - x$ is $GQ = \sqrt{QF^2 + FG^2} = \sqrt{(30-x)^2 + 20^2}$.
Dus $l(x) = AQ + GQ = \sqrt{15^2 + x^2} + \sqrt{(30-x)^2 + 20^2}$.
Met de rekenmachine vind je de minimale afstand $l \approx 46{,}1$ voor $x \approx 12{,}86$.

b



c De kortste route van A naar G is via één van de lijnen a, b of c.
Pythagoras geeft $a = AG_1 = \sqrt{AH_1^2 + H_1G_1^2} = \sqrt{35^2 + 30^2} = \sqrt{2125} \approx 46{,}10$.
En $b = AG_2 = \sqrt{AH_2^2 + H_2G_2^2} = \sqrt{35^2 + 30^2} = \sqrt{2125} \approx 46{,}10$.
En tenslotte $c = AG_3 = \sqrt{AF_2^2 + F_2G_3^2} = \sqrt{45^2 + 20^2} = \sqrt{2425} \approx 49{,}24$.
Dus is de lengte van een kortste route ongeveer 46,10.

d Omdat $\triangle AE_1Q \sim \triangle AH_1G_1$ geldt:

$\triangle AE_1Q$	$AE_1 = 15$	E_1Q	AQ
$\triangle AH_1G_1$	$AH_1 = 35$	$H_1G_1 = 30$	AG_1

Dus $\dfrac{E_1Q}{H_1G_1} = \dfrac{AE_1}{AH_1} = \dfrac{15}{35} = \dfrac{3}{7} \Rightarrow E_1Q = \frac{3}{7} \cdot H_1G_1 = \frac{3}{7} \cdot 30 = \frac{90}{7} \approx 12{,}86$.
Dit komt overeen met het antwoord van opdracht a.

e Via Q of R.

T-6a De afstand tussen PF en HG is 0, want de verlengden van beide lijnen snijden elkaar.
De afstand tussen PF en QG wordt gegeven door FG.

b QG loopt *niet* evenwijdig aan een lijn in vlak AFP en daarmee loopt QG niet evenwijdig aan vlak AFP. Als een lijn en een vlak niet evenwijdig lopen zullen ze elkaar ergens snijden. Dus QG en AFP snijden elkaar ergens. De afstand tussen beiden is daarom 0.