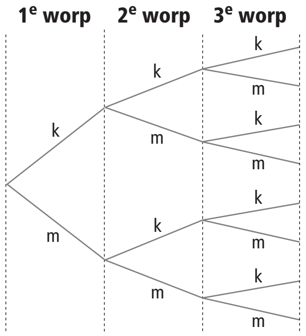
Hoofdstuk 3 - Telproblemen

3.1 Machtsbomen en faculteitsbomen

bladzijde 56

1a



b In het boomdiagram tel je $2^3 = 8$ verschillende routes.

c Dan moet de speler minstens twee keer kop gooien.
Hij maakt dus winst bij de series: k-k-k, k-k-m, k-m-k en m-k-k.

d De organisator maakt in de helft van de gevallen 1,75 euro winst, want dan is het aantal keren kop 0 of 1. Ga ervan uit dat het spel 1000 keer gespeeld wordt. De organisator krijgt dan 1750 euro inleg. Hij zal naar verwachting bij 3 van elke 8 spelletjes 2 euro uit moeten keren en bij 1 van de 8 spelletjes moet hij 3 euro uitkeren. Per 1000 spelletjes is de opbrengst naar verwachting $1750 - 375 \times 2 - 125 \times 3 = 625$ euro. De organisator maakt dus winst.

2a Het aantal verschillende instellingen is $2^3 = 8$.

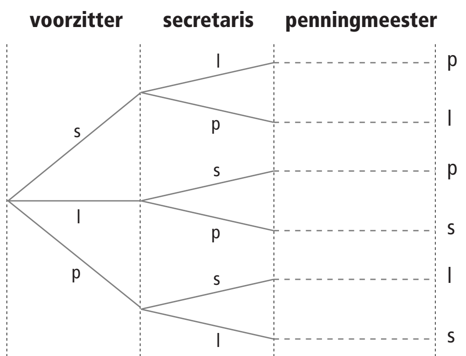
b Dan zijn er $2^6 = 64$ verschillende instellingen.

c Je hebt dan minstens 10 verschillende dipswitches nodig, want $2^{10} = 1024 > 1000$.

3 Als je naar het boomdiagram kijkt, zie je dat er $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ mogelijkheden zijn.

bladzijde 57

4a



b In het boomdiagram zie je dat er $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ mogelijkheden zijn.

5a $10! = 3628800$ en $14! = 87178291200$

b $\frac{5!}{4!} = 5$, $\frac{70!}{69!} = 70$ en $\frac{100!}{98!} = 100 \cdot 99 = 9900$.

6a $5! = 120$ verschillende volgordes
b $26^4 = 456976$ verschillende codes
c $4! = 24$ manieren
d $3^{50} \approx 7{,}18 \times 10^{23}$ manieren
e Bij de opdrachten a en c heb je te maken met een faculteitsboom Bij opdrachten b en d gaat het om een machtsboom.

3.2 Permutaties

bladzijde 58

7a Dan kun je $5! = 120$ verschillende woorden maken.
b Voor de eerste letter kun je kiezen uit vijf letters, voor de tweede letter kun je kiezen uit vier letters en voor de laatste letter kun je uit drie letters kiezen. In het totaal zijn er dus $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ mogelijkheden.
c Je kunt dan vier keer een letter kiezen. Dit kan op $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ verschillende manieren.

8a $\dfrac{20!}{(20-6)!} = \dfrac{20!}{14!} = 27\,907\,200$
b Het aantal permutaties van 3 uit 8 is $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ en het aantal permutaties van 4 uit 6 is $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$, dus er zijn meer permutaties van 4 uit 6.
c Het aantal permutaties van 2 uit 5 is $5 \cdot 4 = 20$ en het aantal permutaties van 3 uit 5 is $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.
d Het aantal permutaties van 2 uit 100 is $100 \cdot 99 = 9900$.

bladzijde 59

9a Het aantal verschillende truien is $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$.
b Dat kan op $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 358\ 800$ manieren.
c Er zijn $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ verschillende mogelijkheden.

10 De vraag zou kunnen zijn: op hoeveel manieren kun je uit een klas van 20 leerlingen drie leerlingen kiezen, waarvan de eerst gekozen leerling het bord schoonveegt, de tweede leerling blaadjes uitdeelt en de derde leerling een laptop wegbrengt naar het computerlokaal.

11a Het aantal verschillende wikkels is $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.
b Er zijn $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ mogelijkheden om de drie talen te kiezen.
Daarna kun je die drie nog op $3! = 6$ posities op de wikkel plaatsen.
Dus $210 \cdot 6 = 1260$ verschillende wikkels.
c Voor de twee andere talen kun je dan nog uit 9 talen kiezen. Er zijn dan $3 \cdot 9 \cdot 8 = 216$, want het Nederlandse woord suiker kan op elk van de drie plaatsen staan.

12a Het aantal verschillende woorden is $5! = 120$.
b Verwisseling van de twee E's geeft hetzelfde woord dus zijn er dan $120 : 2 = 60$ verschillende woorden.

c Als je elk van de drie A's een andere kleur geeft zijn er $6! = 720$ verschillende woorden. Maar als de A's niet van elkaar te onderscheiden zijn, geeft elk van de zes verwisselingen van de drie A's hetzelfde woord. Dus zijn er 720: 6 = 120 verschillende woorden.

3.3 Combinaties

bladzijde 60

13a Er zijn $3! = 6$ verschillende woorden.

b Als je niet op de volgorde let, is bijvoorbeeld de keuze eerst een K dan een U en tenslotte een N, hetzelfde als de keuze eerst een N, dan een K en tenslotte een U. Er zijn 6 verschillende volgorden van de letters van een woord met drie letters. Die 6 drieletterwoorden zijn dezelfde mogelijkheid. Dus zijn er 60: 6 = 10 manieren.

c Het antwoord van opdracht b kun je ook schrijven als $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1}$. In de teller staat het aantal permutaties van 3 uit 5. Je deelt door 6, omdat er steeds 6 volgorden mogelijk zijn als er drie letters gekozen worden en die 6 volgorden horen bij dezelfde mogelijkheid.

14a $\binom{19}{3} = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 969$; $\binom{20}{6} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 38760$;

$\binom{12}{5} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 792$; $\binom{12}{7} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 792$

b $\binom{3}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} = 3$; $\binom{4}{1} = 4$; $\binom{4}{3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4$; $\binom{100}{1} = 100$

bladzijde 61

15a $\binom{10}{4} = 210$

b $\binom{10}{6} = 210$

c Als je een viertal letters kiest uit tien letters, blijft er steeds een zestal letters over. Die zes zijn ook op te vatten als een keuze. Het aantal keuzes van vier letters is dus even groot als het aantal keuzes van zes letters of anders gezegd $\binom{10}{4} = \binom{10}{6}$.

16a De volgorde binnen het zestal is nu niet belangrijk dus het aantal verschillende mogelijkheden is gelijk aan $\binom{9}{6} = 84$.

b Omdat de spelers van een zestal op verschillende plaatsen kunnen worden opgesteld. De volgorde is dan wel belangrijk.

17a Je kiest uit een rijtje vier plaatsen waar een k staat. Op de overige plaatsen staat dan een m. Dit kan op $\binom{6}{4} = 15$ manieren.

b Dat zijn dan rijtjes met 4, 5 of 6 keer kop. In het totaal gaat het om $\binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 15 + 6 + 1 = 22$ mogelijkheden.

18a Je doet dan 8 + 4 = 12 stappen in een rooster, waarvan 4 naar boven. Het aantal verschillende routes is dan $\binom{12}{4} = 495$.

b Bij elke goed beantwoorde vraag doe je een stap naar boven in het rooster en een fout beantwoorde vraag betekent een stap naar rechts. Je komt dan uit bij het punt $(4, 8)$. Het aantal verschillende routes van $(0, 0)$ naar $(4, 8)$ is $\binom{12}{8} = 495$.

c Bij een 0 doe je een stap naar rechts in het rooster en bij een 1 een stap naar boven. Je komt bij het roosterpunt $(2, 6)$ uit. Het aantal routes van $(0, 0)$ naar $(2, 6)$ is gelijk aan $\binom{8}{2} = 28$.

3.4 De goede telmethode kiezen

bladzijde 62

19a Een rooster is niet geschikt omdat er drie keer een keuze moet worden gemaakt, terwijl bij een rooster er maar in twee richtingen stappen kunnen worden gezet.

b Je kunt bijvoorbeeld een boomdiagram maken.

c Er zijn $4 \cdot 5 \cdot 3 = 60$ verschillende dagprogramma's.

20 In een rooster kun je een stap naar boven doen als je zes gooit en een stap naar rechts als je geen zes gooit. Het aantal rijtjes is dan gelijk aan het aantal routes van $O(0, 0)$ naar $A(3, 2)$. Dit aantal is gelijk aan $\binom{5}{3} = 10$.

bladzijde 63

21a Je kiest 2 van de 15 plaatsen uit om er de rode kogels neer te leggen. Op de overige plaatsen leg je witte kogels. Dit kan op $\binom{15}{2} = 105$ manieren.

b Als je eerst de rode kogel neerlegt zijn er 15 mogelijkheden. De blauwe kogel kan vervolgens dan nog op 14 plaatsen worden neergelegd. Er zijn dus $15 \cdot 14 = 210$ mogelijkheden.

22a De decaan kiest 10 leerlingen uit 24 om er op maandag mee te praten. Dit kan, als de volgorde onbelangrijk is, op $\binom{24}{10} = 1\,961\,256$ verschillende manieren.

b Het aantal volgorden waarin de tien gesprekken worden gevoerd is gelijk aan $10! = 3\,628\,800$.

c Een rooster voor de gesprekken is een rijtje van drie keer een j (jongen) en zeven keer een m (meisje). Het aantal van zulke rijtjes is $\binom{10}{3} = 120$.

23a Er zijn $10^4 = 10\,000$ verschillende verdelingen.

b Als die ballen allemaal in een verschillende doos terechtkomen zijn er $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ verdelingen.

c 10 verdelingen, want er zijn 10 dozen.

d Het aantal tweetallen dozen is gelijk aan $\binom{10}{2} = 45$.

e Het aantal verdelingen waarbij er drie ballen in doos drie komen en één bal in doos 8 is gelijk aan $\binom{4}{3} = 4$. Er zijn ook vier verdelingen waarbij er drie ballen in doos 8 terechtkomen en één bal in doos 3. Er zijn $\binom{4}{2} = 6$ verdelingen waarbij er twee ballen in doos 3 en de overige twee in doos 8 terechtkomen. Het totaal aantal verdelingen is hier dus 4 + 4 + 6 = 14.

24a Het aantal verschillende groepen veldspelers is gelijk aan $\binom{10}{7} = 120$. Omdat er twee keepers zijn, kun je $120 \cdot 2 = 240$ verschillende teams samenstellen.

b Er zijn $\binom{7}{4} = 35$ verschillende samenstellingen mogelijk.

3.5 Gemengde opdrachten

bladzijde 64

25a Om een teken te maken, kies je twee van de acht posities waarbij de volgorde onbelangrijk is. Dit geeft $\binom{8}{2} = 28$ verschillende tekens.

b Het aantal mogelijke tekens is dan twee maal zo groot, dus 56.

26a Bij mogelijkheid 1 zijn er $\binom{6}{2} = 15$ wedstrijden in poule A en evenveel in poule B.
Verder zijn er 2 kruisfinales, de finale van de winnaars van de kruisfinales en de finale van de verliezers van de kruisfinales. In het totaal geeft dit $2 \cdot 15 + 2 + 1 + 1 = 34$ wedstrijden.
Bij mogelijkheid 2 zijn er $\binom{4}{2} = 6$ poulewedstrijden in elke poule, dus in het totaal 18 poulewedstrijden. Verder zijn er weer 2 kruisfinales, een finale van de winnaars en een finale van de verliezers. Samen geeft dit $18 + 2 + 1 + 1 = 22$ wedstrijden.

b Bij mogelijkheid 1 speelt de winnaar 5 + 1 +1 = 7 wedstrijden en dat duurt 140 minuten.
Bij mogelijkheid 2 speelt de winnaar 3 + 1 + 1 = 5 wedstrijden en dat duurt 150 minuten.

c Een erg zwak team zal alle wedstrijden verliezen en speelt dus bij mogelijkheid 1: vijf poulewedstrijden met een duur van 100 minuten en bij mogelijkheid 2: drie poulewedstrijden met een duur van 90 minuten.

d Als beide gymzalen in gebruik zijn is de duur van het toernooi bij mogelijkheid 1 gelijk aan $(34 : 2) \times 20 = 340$ minuten en bij mogelijkheid 2 gelijk aan $(22 : 2) \times 30 = 330$ minuten.
De organisatie zal dus voor mogelijkheid 2 kiezen.

bladzijde 65

27a Het lijkt op het eerste gezicht geen eerlijk spel want de ogenaantallen op de verschillende dobbelstenen zijn nogal verschillend, zo kun je bij dobbelsteen C zes ogen gooien en dit kan niet bij één van de overige dobbelstenen.

b

	0	0	4	4	4	4
1	T	T	P	P	P	P
1	T	T	P	P	P	P
1	T	T	P	P	P	P
5	T	T	T	T	T	T
5	T	T	T	T	T	T
5	T	T	T	T	T	T

In deze situatie is Thamar in het voordeel want zij wint in 24 van de 36 mogelijke gevallen.

c

	3	3	3	3	3	3
0	P	P	P	P	P	P
0	P	P	P	P	P	P
4	T	T	T	T	T	T
4	T	T	T	T	T	T
4	T	T	T	T	T	T
4	T	T	T	T	T	T

Ook in deze situatie wint Thamar in 24 van de 36 mogelijke situaties.

d Dan moet Thamar dobbelsteen B kiezen, ook dan wint ze weer in 24 van de 36 situaties.

	2	2	2	2	6	6
3	T	T	T	T	P	P
3	T	T	T	T	P	P
3	T	T	T	T	P	P
3	T	T	T	T	P	P
3	T	T	T	T	P	P
3	T	T	T	T	P	P

e Dan moet Thamar dobbelsteen C kiezen en ze wint opnieuw bij 24 van de 36 worpen.

	1	1	1	5	5	5
2	T	T	T	P	P	P
2	T	T	T	P	P	P
2	T	T	T	P	P	P
2	T	T	T	P	P	P
6	T	T	T	T	T	T
6	T	T	T	T	T	T

f Welke dobbelsteen Philip ook kiest, Thamar kan er altijd uit de overige drie een kiezen waarbij ze meer kans heeft om te winnen. Het is dus geen eerlijk spel.

Test jezelf

bladzijde 68

T-1a Het aantal takken wordt voor elke volgende baan steeds 1 minder. Een complete tekening is vanwege deze regelmaat niet nodig.

b Het aantal vlaggen is gelijk aan $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

c Dan zijn er $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 324$ vlaggen mogelijk.

T-2a Er zijn $10^4 = 10\,000$ verschillende codes.
b Dan zijn er nog $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ mogelijkheden.
c Als je de twee vieren verwisselt blijft de cijfercode hetzelfde. Er zijn dus 24: 2 =12 verschillende mogelijkheden.

T-3a $6^{10} = 60\,466\,176$ verschillende getallen, want bij de keuze van elk cijfer heb je zes mogelijkheden en je kiest 10 keer.
b Je kunt de vijf vieren op $\binom{10}{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 252$ manieren over 10 plaatsen verdelen. De rest van de plaatsen vul je aan met vijven.

T-4a Je hebt de volgende mogelijkheden:
VMEC, VMCE, VEMC, VECM, VCME, VCEM
MVEC, MVCE, MEVC, MECV, MCVE, MCEV
EVMC, EVCM, EMVC, EMCV, ECVM, ECMV
CVME, CVEM, CMVE, CMEV, CEVM, CEMV
b Er zijn $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ verschillende volgorden.
c Alle mogelijkheden waarbij op de eerste plaats een V, op de tweede plaats een M, op de derde plaats een E of op de vierde plaats een C staat zijn de mogelijkheden waarbij iemand zijn eigen naam trekt. Dit is bij 15 van de 24 mogelijkheden het geval.

bladzijde 69

T-5a Er zijn $\binom{52}{4} = 270\,725$ mogelijke viertallen kaarten.
b Voor elk van deze vier kaarten heb je vier mogelijkheden dus zijn er in het totaal $4^4 = 256$ mogelijkheden.
c De 2 ruiten kun je op $\binom{13}{2} = 78$ manieren kiezen. Dit is ook het geval voor de twee harten.
Er zijn dus $78^2 = 6084$ verschillende mogelijkheden.

T-6a Het aantal kaartjes is gelijk aan $\binom{10}{3} = 120$.
b Er moeten nog twee andere straten op het kaartje staan die je uit de overige negen straten moet kiezen. Het aantal manieren waarop dat kan is gelijk aan $\binom{9}{2} = 36$.
c Die komen op 8 kaartje samen voor, want de derde straat moet je uit de overige acht kiezen.

T-7a Dat kan op $\binom{9}{3} = 84$ manieren.
b Het ene gaatje staat niet in de rij en de kolom van het andere gaatje, dus als er al één gaatje is, zijn er nog 4 mogelijkheden voor het tweede gaatje. Omdat dit voor elk tweetal gaatjes opgaat zijn er in het totaal $(9 \times 4) : 2 = 18$ mogelijkheden. Je moet door 2 delen anders tel je elke mogelijkheden twee keer mee.
c Bij elk cijfer zijn er twee mogelijkheden: wegponsen of niet. In het totaal zijn er dus $2^9 - 1 = 511$ mogelijkheden. Het is dus mogelijk om in elke trein op een verschillende wijze gaatjes weg te ponsen.

