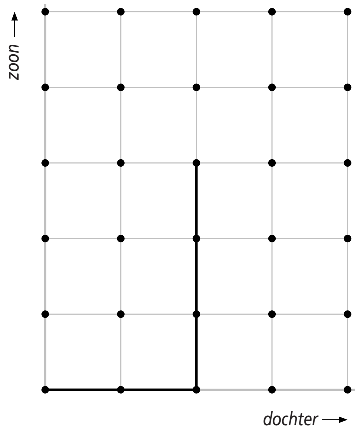
Hoofdstuk 5 - De binomiale verdeling

5.1 Succes en mislukking

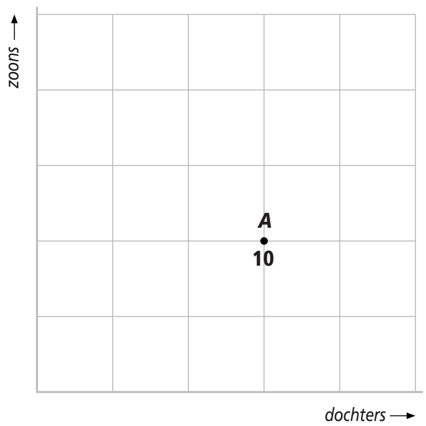
bladzijde 92

1a



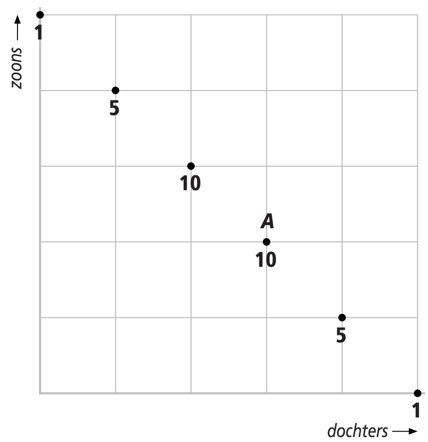
b *DDZZZ; DZDZZ; DZZDZ; DZZZD; ZDDZZ; ZDZDZ; ZDZZD; ZZDDZ; ZZDZD; ZZZDD*

c

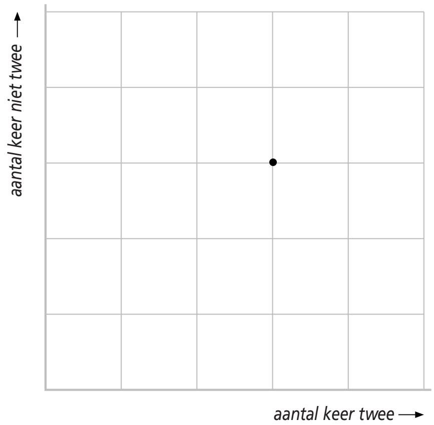


d Het aantal mogelijkheden om 3 D's in een rijtje van 5 te kiezen (en de rest aan te vullen met Z's) is gelijk aan het aantal mogelijkheden om 2 Z's in een rijtje van 5 te kiezen (en de rest aan te vullen met D's).

e



2a



b Met de rekenmachine: 6 nCr 3 = 20

c Deze kans is $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3\approx 0{,}002679$

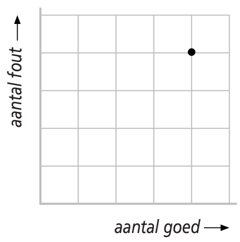
d Er zijn 20 routes met dezelfde kans. De gevraagde kans is dus $20\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3\approx 0{,}0536$.

bladzijde 93

3a Het gaat om vierkeuzevragen. Eén van de antwoorden is maar goed. De kans op succes is dus $\frac{1}{4}$ en de kans op mislukking $\frac{3}{4}$.

b Steeds er is sprake van 2 mogelijke uitkomsten (succes en mislukking) en met een vaste kans op succes. Dus gaat het hier om een binomiaal kansexperiment.

c



d Er zijn 8 nCr 4 = 70 routes naar dat punt.

e Deze kans is $\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4\approx 0{,}001236$.

f Er zijn 70 mogelijke routes met dezelfde kans. De gevraagde kans is $70\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4\approx 0{,}0865$.

g Het gaat nu om tweekeuzevragen, dus is de kans op succes $\frac{1}{2}$. Twee fout op de zes komt overeen met vier goed op de zes, dit kan op 6 nCr 4 = 15 manieren. Elk van die mogelijkheden heeft een kans van $\left(\frac{1}{2}\right)^6$. Dus is de gevraagde kans $15\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6\approx 0{,}2344$.

4a Ja, het is een binomiaal kansexperiment. Succes is hier het optreden van munt en de kans daarop is steeds hetzelfde. Verder is $n=5,\ p=\frac{1}{2},\ q=\frac{1}{2}$.

b Je let hier niet op het aantal successen (zessen) en het aantal worpen staat van te voren niet vast. Neen dus, geen binomiaal kansexperiment.

c Strikt genomen niet! Maar: het is bij benadering een binomiaal kansexperiment omdat het een grote populatie is.

d Ja, het is een binomiaal kansexperiment. Succes is hier het trekken van een rode knikker en door het steeds terugleggen van de getrokken knikker is de kans daarop steeds hetzelfde. Nu is $n=6,\ p=\frac{1}{6},\ q=\frac{5}{6}$.

e De kans op rood (succes) verandert omdat er nu zonder teruglegging wordt getrokken. Het antwoord is dus nee, geen binomiaal kansexperiment.

f Je let hier niet op het aantal gewonnen sets en verder staat het aantal te spelen sets niet van te voren vast. Geen binomiaal kansexperiment.

5.2 Binomiale verdelingen

bladzijde 94

5a Er zijn steeds 2 mogelijkheden, namelijk genezing (succes) of geen genezing (mislukking). Volgens de inleiding is er een vaste kans 0,75 op succes. Het is dus een binomiaal kansexperiment en verder is $p = \frac{3}{4}$, $q = \frac{1}{4}$ en $n = 60$.

b Deze kans is $\left(\frac{3}{4}\right)^{52} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{8} \approx 4,9 \times 10^{-12}$.

c Er zijn 60 nCr 52 = 2 558 620 845 routes.

d Elk van deze 60 nCr 52 mogelijkheden heeft dezelfde kans $\left(\frac{3}{4}\right)^{52} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{8}$, dus is de gevraagde kans gelijk aan $2\,558\,620\,845 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{52} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{8} \approx 0,0124$.

e Nu zijn er $\binom{60}{45}$ = 60 nCr 45 routes elk met een kans van $\left(\frac{3}{4}\right)^{45} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{15}$. Dus is de kans op 45 genezen patiënten gelijk aan $\binom{60}{45} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{45} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{15}$. Deze kans ongeveer gelijk aan 0,1182.

bladzijde 95

6 $P(X=0) = \left(\frac{3}{4}\right)^{5} \approx 0,2373$; $P(X=1) = \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{4} \approx 0,3955$;

$P(X=3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{2} \approx 0,0879$; $P(X=4) = \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right) \approx 0,0147$;

$P(X=5) = \left(\frac{1}{4}\right)^{5} \approx 0,0010$

7a Hier is X binomiaal verdeeld met parameters $p = 0,16$ en $n = 6$.

b $P(X=4) = \binom{6}{4} \cdot 0,16^4 \cdot 0,84^2 \approx 15 \cdot 0,16^4 \cdot 0,84^2 \approx 0,0069$

c $P(X=0) = 0,84^6 \approx 0,3513$; $P(X=1) = \binom{6}{1} \cdot 0,16 \cdot 0,84^5 \approx 6 \cdot 0,16 \cdot 0,84^5 \approx 0,4015$;

$P(X=2) = \binom{6}{2} \cdot 0,16^2 \cdot 0,84^4 \approx 15 \cdot 0,16^2 \cdot 0,84^4 \approx 0,1912$;

$P(X=3) = \binom{6}{3} \cdot 0,16^3 \cdot 0,84^3 \approx 20 \cdot 0,16^3 \cdot 0,84^3 \approx 0,0486$;

$P(X=5) = \binom{6}{5} \cdot 0,16^5 \cdot 0,84 \approx 6 \cdot 0,16^5 \cdot 0,84 \approx 0,0005$; $P(X=6) = 0,16^6 \approx 0,0000$.

x	0	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	0,3513	0,4015	0,1912	0,0486	0,0069	0,0005	0,00002

8a Hij heeft 10 keer met de dobbelsteen gegooid.

b Aan de formule te zien is de kans op een zes $\frac{2}{3}$ (enige factor die tot de macht 2 verheven wordt), dus moet aan 4 van de 6 kanten van de dobbelsteen een zes staan ($\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$).

9a Hier is X binomiaal verdeeld met parameters $n = 240$ en $p = 0,15$.

b $P(X = 30) = \binom{240}{30} \cdot 0,15^{30} \cdot 0,85^{210} \approx 1,44919 \times 10^{38} \cdot 0,15^{30} \cdot 0,85^{210} \approx 0,0419$

c 15% van 240 leerlingen betekent 36 leerlingen.

$P(X = 36) = \binom{240}{36} \cdot 0,15^{36} \cdot 0,85^{204} \approx 8,24653 \times 10^{42} \cdot 0,15^{36} \cdot 0,85^{204} \approx 0,0719$

d Behalve de verschillende machten moet je ook 240 nCr 36 intikken.

10a Het aantal wedstrijden is 20, dus $n = 20$. De kans op munt is $\frac{1}{2}$, dus $p = \frac{1}{2}$.

b $P(X = 12) = \binom{20}{12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{20} = 125970 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{20} \approx 0,1201$

c $P(X = 5) = \binom{20}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{20} = 15504 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{20} \approx 0,0148$

d $P(X = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{20} \approx 9,5 \times 10^{-7}$

11a Hier is X binomiaal verdeeld met parameters $n = 10$ en $p = 0,7$.

$P(X = 5) = \binom{10}{5} \cdot 0,7^5 \cdot 0,3^5 = 252 \cdot 0,7^5 \cdot 0,3^5 \approx 0,1029$

b $P(X = 8) = \binom{10}{8} \cdot 0,7^8 \cdot 0,3^2 = 45 \cdot 0,7^8 \cdot 0,3^2 \approx 0,2335$

c $P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,3^{10} + 10 \cdot 0,7 \cdot 0,3^9 + 45 \cdot 0,7^2 \cdot 0,3^8 \approx$
$5,9 \times 10^{-6} + 1,4 \times 10^{-4} + 0,00145 \approx 0,0016$

5.3 Cumulatieve kansen

bladzijde 96

12a $P(X = 2) = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^4 = 10 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^4 \approx 0,2966$

b $P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \approx \left(\frac{3}{4}\right)^6 + 6 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 + 0,2966 \approx 0,8305$

13a $P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \left(\frac{4}{5}\right)^6 + \binom{6}{1} \cdot \left(\frac{1}{5}\right) \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^5 + \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 =$
$\left(\frac{4}{5}\right)^6 + 6 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^5 + 15 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 \approx 0,2621 + 0,3932 + 0,2458 = 0,9011$.
Anders en gemakkelijker: binomcdf(6; 0,2; 2) $= 0,90112 \approx 0,9011$

b Anders en gemakkelijker: binomcdf(6; 0,2; 4) $= 0,9984 \approx 0,998$
$P(X \le 4) = 1 - P(X = 6) - P(X = 5) = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^6 - 6 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right) \approx 1 - 0,00006 - 0,00154 \approx 0,998$

c $X > 6$ is volgens de inleiding niet mogelijk. Dus omvat $X \le 6$ alle mogelijkheden en is $P(X \le 6) = 1$. Uiteraard krijg je datzelfde resultaat als je met binomcdf werkt.

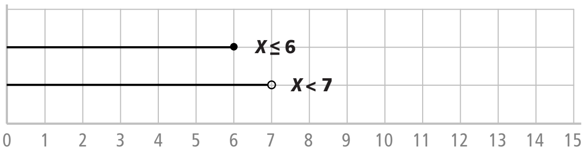
bladzijde 97

14a $n = 200$ en $p = 0,1 = \frac{1}{10}$; $P(X \le 24) = \text{binomcdf}(200;\ \frac{1}{10};\ 24) \approx 0,8551$

b $P(X \le 24) + P(X > 24) = 1$ omdat $X \le 24$ en $X > 24$ samen alle mogelijkheden omvatten en er geen overlap is.

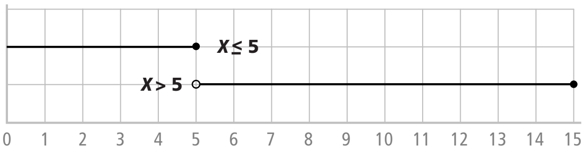
c $P(X > 24) = 1 - P(X \le 24) \approx 1 - 0,8551 = 0,1449$

15a



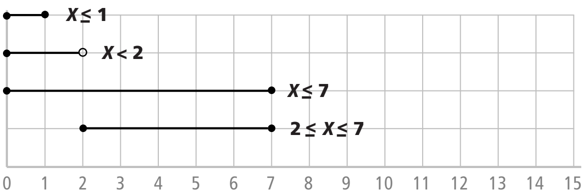
$P(X \leq 6) = \text{binomcdf}(15;\ 0,4;\ 6) \approx 0,6098$

b



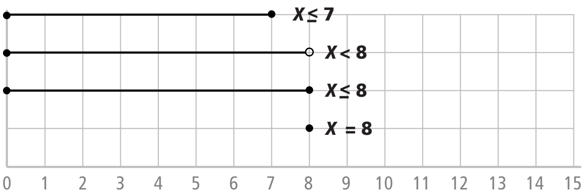
$1 - P(X \leq 5) = 1 - \text{binomcdf}(15;\ 0,4;\ 5) \approx 0,5968$

c



$P(X \leq 7) - P(X \leq 1) = \text{binomcdf}(15;\ 0,4;\ 7) - \text{binomcdf}(15;\ 0,4;\ 1) \approx 0,7817$

d



$P(X \leq 8) - P(X \leq 7) = \text{binomcdf}(15;\ 0,4;\ 8) - \text{binomcdf}(15;\ 0,4;\ 7) \approx 0,1181$

16a $n = 120$ en $p = 0,05$ dan is
$P(X \geq 11) = 1 - P(X < 11) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - \text{binomcdf}(120;\ 0,05;\ 10) \approx 1 - 0,9616 = 0,0384$

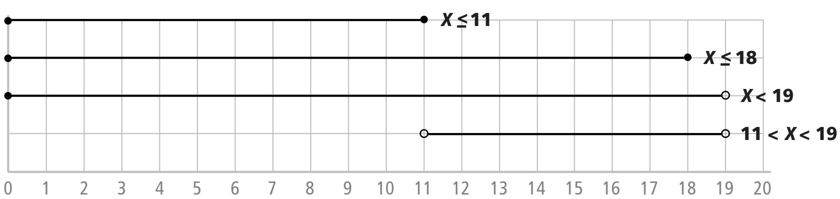
b De kans op een pak koffie van minstens 248 gram is 0,95. Als je het aantal pakken telt van minstens 248 gram dan is dat aantal binomiaal verdeeld met parameters $n = 120$ en $p = 0,95$.
$P(107 \leq X \leq 118) = P(X \leq 118) - P(X < 107) = P(X \leq 118) - P(X \leq 106) =$
$\text{binomcdf}(120;\ 0,95;\ 118) - \text{binomcdf}(120;\ 0,95;\ 106) \approx 0,9817$

5.4 Werken met binomiale verdelingen

bladzijde 98

17a $n = 50$ is het aantal mensen dat aan de cursus meedoet. De kans op succes is $p = 0,3$.

b



Dus $P(11 < X < 19) = P(X \leq 18) - P(X \leq 11)$

c $P(11 < X < 19) = P(X \le 18) - P(X \le 11) = \text{binomcdf}(50;\ 0,3;\ 18) - \text{binomcdf}(50;\ 0,3;\ 11)$
$\approx 0,7204$

d $P(X > 15) = 1 - P(X \le 15) = 1 - \text{binomcdf}(50;\ 0,3;\ 15) \approx 0,4308$
$P(X = 4) = P(X \le 4) - P(X \le 3) = \text{binomcdf}(10;\ 0,8;\ 4) - \text{binomcdf}(10;\ 0,8;\ 3) \approx 0,0055$

18a Het aantal worpen $n = 10$ en de kans op een treffer is $p = 0,8$.

b $P(X \le 7) = \text{binomcdf}(10;\ 0,8;\ 7) \approx 0,3222$

c Als Y het aantal missers is dan is deze grootheid binomiaal verdeeld met parameters $n = 10$ en $p = 0,2$. En dus is $P(Y \ge 2) = 1 - P(Y \le 1) = 1 - \text{binomcdf}(10;\ 0,2;\ 1) \approx 0,6242$

d $P(5 \le X < 8) = P(X \le 7) - P(X \le 4) = \text{binomcdf}(10;\ 0,8;\ 7) - \text{binomcdf}(10;\ 0,8;\ 4) \approx 0,3158$

e De kans op eerste twee worpen raak is $0,8^2 = 0,64$. Het aantal missers in de laatste 8 worpen is binomiaal verdeeld met parameters $n = 8$ en $p = 0,2$.
$P(Y \ge 5) = 1 - P(Y \le 4) = 1 - \text{binomcdf}(8;\ 0,2;\ 4) \approx 0,0104$. De kans op eerst twee treffers en daarna in de overige 8 worpen minstens 5 missers is dus $0,64 \cdot 0,0104 \approx 0,0067$.

bladzijde 99

19a Hier is $n = 20$ en $p = 0,3$. $P(X < 9) = P(X \le 8) = \text{binomcdf}(10;\ 0,3;\ 8) \approx 0,8867$

b $P(X > 4) = 1 - P(X \le 4) = 1 - \text{binomcdf}(20;\ 0,3;\ 4) \approx 0,7625$

c $P(4 < X < 9) = P(X \le 8) - P(X \le 4) = \text{binomcdf}(20;\ 0,3;\ 8) - \text{binomcdf}(20;\ 0,3;\ 4) \approx 0,6492$

d Nu is $n = 100$ en nog steeds $p = 0,3$. $P(20 < X < 45) = P(X \le 44) - P(X \le 20) =$
$\text{binomcdf}(100;\ 0,3;\ 44) - \text{binomcdf}(100;\ 0,3;\ 20) \approx 0,9825$

e $P(X \ge 25) = 1 - P(X \le 24) = 1 - \text{binomcdf}(100;\ 0,3;\ 24) \approx 0,8864$

20a Kans op geen vlam is $p = 0,15$ en aantal pogingen $n = 10$.
$P(X \ge 2) = 1 - P(X \le 1) = 1 - \text{binomcdf}(10;\ 0,15;\ 1) \approx 0,4557$

b Voer in je rekenmachine in $Y1 = 1 - \text{binomcdf}(10;\ \text{X};\ 1)$ en ga via TBLSET en TABLE na voor welke X (3 decimalen) de kans $Y1$ ongeveer gelijk is aan 0,05.
Na enig gezoek vind je:

X	Y1	
.033	.04109	
.034	.04338	
.035	.04573	
.036	.04812	
.037	.05056	
.038	.05305	
.039	.05558	

X=.037

Dus $p = 0,37$ geeft de beste benadering. De vlamkans is dan $1 - 0,037 = 0,963$

21a Hier is $p = 0,20$ de kans dat een willekeurige wielrenner doping gebruikt en dus bij controle wordt betrapt. Verder is hier $n = 10$ het aantal renners dat op doping wordt gecontroleerd. $P(X = 0) = P(X \le 0) = \text{binomcdf}(10;\ 0,2;\ 0) \approx 0,1074$. Je kunt het ook anders uitrekenen, bijvoorbeeld met $P(X = 0) = 0,8^{10}$.

b $P(X \ge 2) = 1 - P(X \le 1) = 1 - \text{binomcdf}(10;\ 0,2;\ 1) \approx 0,6242$

c $P(X \le 4) = \text{binomcdf}(10;\ 0,2;\ 4) \approx 0,9672$

d Voor elke dag is de kans dat zich geen dopinggeval voordoet gelijk aan 0,1074 (zie onderdeel a). Verder zijn er per dag maar twee mogelijke uitkomsten interessant, namelijk met of zonder dopinggeval. Het aantal dagen zonder dopinggeval Y is binomiaal verdeeld met parameters $p = 0{,}1074$ en $n = 21$.

e $\text{P}(X < 3) = \text{P}(X \leq 2) = \text{binomcdf}(21;\ 0{,}1074;\ 2) \approx 0{,}6042$

5.5 Steekproef en verwachtingswaarde

bladzijde 100

22a De kansen op twee rode ballen bij trekking van 3 ballen:

	rood	*wit*	*met teruglegging*	*zonder teruglegging*
A	4	6	$3 \cdot \left(\frac{4}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{10}\right) = 0{,}288$	$3 \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} = 0{,}3$
B	40	60	$3 \cdot \left(\frac{40}{100}\right)^2 \cdot \left(\frac{60}{100}\right) = 0{,}288$	$3 \cdot \frac{40}{100} \cdot \frac{39}{99} \cdot \frac{60}{98} \approx 0{,}2894$
C	400	600	$3 \cdot \left(\frac{400}{1000}\right)^2 \cdot \left(\frac{600}{1000}\right) = 0{,}288$	$3 \cdot \frac{400}{1000} \cdot \frac{399}{999} \cdot \frac{600}{998} \approx 0{,}288$

b Als het aantal ballen waaruit wordt getrokken erg groot is en de steekproefgrootte ten opzichte daarvan erg klein dan komen de kansen die horen bij met en zonder teruglegging erg dicht bij elkaar. En dus mag trekken zonder teruglegging benaderd worden door trekken met teruglegging.

23a De scooters zijn wel of niet opgevoerd, dus zijn er per controle steeds twee mogelijke uitkomsten. De kans op een opgevoerde scooter is steeds gelijk, namelijk 0,4 (of 40%). Het 5 keer aanhouden van een willekeurige scooter en kijken of deze is opgevoerd is dus een binomiaal kansexperiment.

b Je verwacht 40% van 5, dus 2 opgevoerde scooters in de steekproef.

c $\text{P}(X = 0) = 0{,}6^5 \approx 0{,}0778$; $\text{P}(X = 1) = 5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^4 \approx 0{,}2592$;
$\text{P}(X = 2) = 10 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^3 \approx 0{,}3456$; $\text{P}(X = 3) = 10 \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^2 \approx 0{,}2304$;
$\text{P}(X = 4) = 5 \cdot 0{,}4^4 \cdot 0{,}6 \approx 0{,}0768$ en $\text{P}(X = 5) = 0{,}4^5 \approx 0{,}0102$

d De verwachtingswaarde is dan ongeveer
$0 \times 0{,}0778 + 1 \times 0{,}2592 + 2 \times 0{,}3456 + 3 \times 0{,}2304 + 4 \times 0{,}0768 + 5 \times 0{,}0102 = 1{,}9998$.
Dit komt dus goed overeen met het antwoord bij b.

bladzijde 101

24a Het aantal minuten dat de spoorbomen per uur (60 minuten) gesloten zijn is $0 \times 1 + 4 \times 1{,}5 + 2 \times 2 + 2 \times 2{,}5 + 0 \times 3 = 15$. Dat betekent dus inderdaad dat de spoorbomen een kwart van de tijd gesloten zijn en dat bij willekeurig aan komen fietsen de kans 0,25 is dat de bomen zijn gesloten.

b Hier is $n = 20$ en $p = 0{,}25$. De verwachting is dan ze $n \cdot p = 20 \cdot 0{,}25 = 5$ keer voor gesloten spoorbomen moet wachten.

c $\text{P}(X > 2) = 1 - \text{P}(X \leq 2) = 1 - \text{binomcdf}(20;\ 0{,}25;\ 2) \approx 0{,}9087$. Haar buurman heeft dus gelijk.

25a Hier is $n = 50$ en $p = 0{,}45$. De verwachting is dan $n \cdot p = 22\frac{1}{2}$, een aantal dat natuurlijk nooit precies gehaald kan worden.

b De kans op niet-slagen voor het eerste jaar is 0,55. Het verwachte aantal niet-geslaagden is $27\frac{1}{2}$. De gevraagde kans is
$P(X < 27\frac{1}{2}) = P(X \le 27) = \text{binomcdf}(50;\ 0{,}55;\ 27) \approx 0{,}4981$

26a Niet het aantal rode knikkers wordt geteld, maar het aantal knikkers wat getrokken moet worden om een rode te krijgen. De kansen op rood zijn niet steeds hetzelfde en het aantal trekkingen is niet van te voren vastgesteld. Het lijkt er niet op.

b Ilse trekt eerst een witte, daarna een rode knikker. En dus $P(X = 2) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$.

c $P(X = 1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $P(X = 3) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{5}$; $P(X = 4) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$ en
$P(X = 5) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{15}$.

x	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

d De verwachtingswaarde van X is $\frac{1}{3} \times 1 + \frac{4}{15} \times 2 + \frac{1}{5} \times 3 + \frac{2}{15} \times 4 + \frac{1}{15} \times 5 = 2\frac{1}{3}$.

e Opdracht a heeft nog steeds hetzelfde antwoord, ook al is de kans op rood nu wel steeds hetzelfde. Opdracht b los je als volgt op: $P(X = 2) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{9}$. De opdrachten c en d zijn niet beantwoordbaar omdat je de kansverdeling nooit volledig op kan schrijven. Het kan namelijk willekeurig lang duren voordat Peter een rode knikker trekt. Maar de kans dat je 20 trekkingen nodig hebt is al erg klein: 0,0002.

5.6 Gemengde opdrachten

bladzijde 102

27a 0,8% van 1500 is 12 stuks. Het gaat dus om
$P(X = 12) = \binom{1500}{12} \cdot 0{,}008^{12} \cdot 0{,}992^{1488} \approx 0{,}1148$. Of:
$P(X = 12) = P(X \le 12) - P(X \le 11) = \text{binomcdf}(1500;\ 0{,}008;\ 12) - \text{binomcdf}(1500;\ 0{,}008;\ 11)$

b Hier is $n = 50$ en $p = 0{,}008$.
$P(X \ge 2) = 1 - P(X \le 1) = 1 - \text{binomcdf}(50;\ 0{,}008;\ 1) \approx 0{,}0609$

c Nu is $n = 15$ en $p = 0{,}0609$ (de kans dat een doos teruggestuurd mag worden).
$P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - \text{binomcdf}(15;\ 0{,}0609;\ 2) \approx 0{,}0593$

28a € 120 aan boodschappen betekent 6 enveloppen, elk met kans $\frac{1}{2}$ dat er een waardebon in zit. De kans op een kerstroos is $P(Y \ge 5) = 1 - P(Y \le 4) = 1 - \text{binomcdf}(6;\ \frac{1}{2};\ 4) \approx 0{,}1094$

b Voer in $Y1 = 1 - \text{binomcdf}(X;\ 0{,}5;\ 4)$ en zoek met TBLSET en TABLE de geschikte waarde voor n zodat $Y1$ voor het eerst groter is dan 0,95. Na enig gezoek krijg je:

X	Y1
10	.62305
11	.72559
12	.80615
13	.86658
14	.91022
15	.94077
16	.96159

X=16

Het gezochte aantal is 16.

c Je moet dus minimaal $16 \times €20 =$ € 320,- aan boodschappen doen.

d Een goede redenering is wellicht: Er zijn 2000 kerstrozen opgehaald. Dat betekent $5 \times 2000 = 10\,000$ uitgereikte enveloppen met waardebon. De helft van de enveloppen die zijn uitgereikt bevat een waardebon, de andere helft niet. Er moeten dus in totaal 20000 enveloppen zijn uitgereikt, die samen een omzetbedrag van € 40 000 vertegenwoordigen. Weliswaar hebben we hier geen rekening gehouden met klanten die met waardebonnen blijven zitten, toch lijkt de schatting van de bedrijfsleider met zijn € 80 000 wat erg optimistisch.

29a Hier is $n = 12$ en in de ogen van André is $p = 0,7$.
$\mathrm{P}(4 \le X \le 8) = \mathrm{P}(X \le 8) - \mathrm{P}(X \le 3) = \mathrm{binomcdf}(12;\ 0,7;\ 8) - \mathrm{binomcdf}(12;\ 0,7;\ 3) \approx 0,5058$

b In de beleving van Bouwe is $p = 0,4$. In dat geval wordt de kans
$\mathrm{P}(4 \le X \le 8) = \mathrm{P}(X \le 8) - \mathrm{P}(X \le 3) = \mathrm{binomcdf}(12;\ 0,4;\ 8) - \mathrm{binomcdf}(12;\ 0,4;\ 3) \approx 0,7594$

c André heeft gelijk dus is $p = 0,7$. Nu is $n = 100$. De kans dat Bouwe gelijk krijgt (ten onrechte dus) is nu $\mathrm{P}(X < 55) = \mathrm{P}(X \le 54) = \mathrm{binomcdf}(100;\ 0,7;\ 54) \approx 0,0005$.

d Stel nu dat Bouwe gelijk heeft. Dan $p = 0,4$. Als $X \ge 55$ dan krijgt André gelijk, ten onrechte dus. De kans hierop is
$\mathrm{P}(X \ge 55) = 1 - \mathrm{P}(X \le 54) = 1 - \mathrm{binomcdf}(100;\ 0,4;\ 54) \approx 0,0017$.

bladzijde 103

30a Nu is $n = 50$ en $p = 0,9$. In dat geval is $\mathrm{P}(X = 45) = \binom{50}{45} \cdot 0,9^{45} \cdot 0,1^{5} \approx 0,1849$

b Als $n = 50$ dan is $\mathrm{P}(X \ge 45) = 1 - \mathrm{P}(X \le 44) = 1 - \mathrm{binomcdf}(50;\ 0,9;\ 44) \approx 0,6161$;
in het geval $n = 100$ moeten er minstens 90 tot bloei komen, dus
$\mathrm{P}(X \ge 90) = 1 - \mathrm{P}(X \le 89) = 1 - \mathrm{binomcdf}(100;\ 0,9;\ 89) \approx 0,5832$.
Een doos met 50 bollen heeft dus een iets grotere kans daaraan te voldoen.

c Bij $n = 100$ en $p = 0,9$ is $\mathrm{P}(X \le 75) = \mathrm{binomcdf}(100;\ 0,9;\ 75) \approx 0,000013$. Omdat deze kans kleiner is dan 0,005, moet hij beslissen dat de bloeikans p niet gelijk is aan 0,9.

d Deze benadering is vooral geënt op wat de consument ervan zal kunnen zeggen en minder op het achterhalen van de waarheid. $\mathrm{P}(X \ge 75) = 1 - \mathrm{P}(X \le 74)$. Voer in $Y1 = 1 - \mathrm{binomcdf}(100;\ X;\ 74)$ en onderzoek via TABLSET en TABLE welke waarde van p hier gezocht wordt. Na enig gezoek vind je:

X	Y1
.8	.91252
.81	.94724
.82	.97051
.83	.98486
.84	.99293
.85	.99703
.86	.9989

X=.84

$p = 0,84$ is de gezochte waarde.

ICT - Binomiale verdelingen

bladzijde 104

I-1a $q = 0{,}25$, af te lezen boven START.

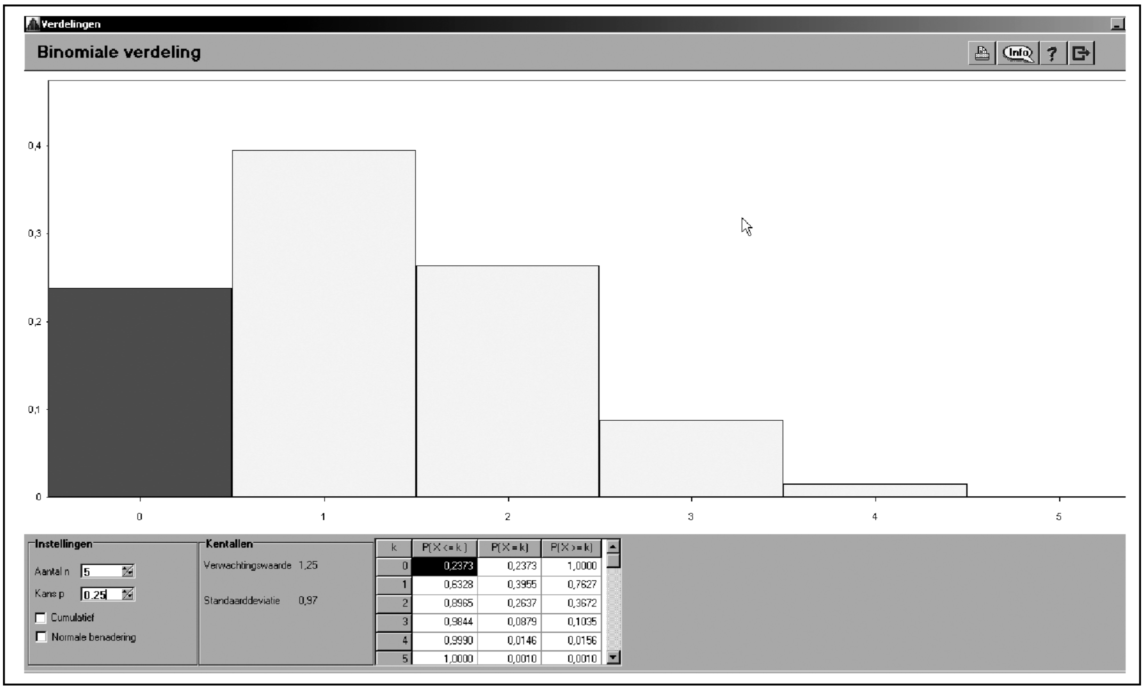
b $\binom{7}{5} \cdot 0{,}75^5 \cdot 0{,}25^2$, waarbij $\binom{7}{5} = 21$ het aantal routes is om van 0 naar 5 genezen patiënten te komen.

c 0,31146

d Stel het aantal stappen op 12, start de kanstabel en lees af: 0,10324.

bladzijde 105

I-2 Zet de parameters n en p op de juiste waarden. Je krijgt dan:



I-3a Hier is $n = 6$ en $p = 0{,}16$.

b $P(X = 4) = \binom{6}{4} \cdot 0{,}16^4 \cdot 0{,}84^2 = (6 \text{ nCr } 4) \cdot 0{,}16^4 \cdot 0{,}84^2 = 15 \cdot 0{,}16^4 \cdot 0{,}84^2 \approx 0{,}0069$

c Invullen van de juiste parameters bij de binomiale verdeling geeft precies hetzelfde resultaat als gevonden bij b.

d

k	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	0,3513	0,4015	0,1912	0,0486	0,0069	0,0005	0,0000

I-4a Hij heeft 10 keer gegooid.

b De factor $\frac{2}{3}$ is de kans om een zes te krijgen. Aan vier kanten van de dobbelsteen moet dus een zes staan.

c Vul $n = 10$ en $p = 0{,}6666667$ in als parameters van de binomiale verdeling en lees af.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = k)$	0,0000	0,0004	0,0030	0,0163	0,0569	0,1366	0,2276	0,2601	0,1951	0,0867	0,0173

d Voor alle $k \geq 5$ is $P(X = k)$ groter dan de overeenkomstige kans in geval van een eerlijke dobbelsteen. Je vindt dat door bij de binomiale verdeling de parameters $n = 10$ en $p = 0{,}1666667$ ($\approx \frac{1}{6}$) in te vullen en de verdeling te vergelijken met bovenstaande tabel.

I-5a Nu is $n = 20$ en $p = \frac{1}{2}$.

b Na invulling parameters lees je af: $P(X = 12) = 0{,}1201$.

c Ook af te lezen is: $P(X = 5) = 0{,}0148$.

d Af te lezen: $P(X = 0) = 0{,}0000$. Deze kans is natuurlijk niet echt 0, maar zo klein dat er bij afronding op 4 decimalen slechts nullen verschijnen.

I-6a $n = 10$ en $p = 0{,}7$; $P(X = 5) = 0{,}1029$

b $n = 20$ instellen en aflezen geeft $P(X = 10) = 0{,}0308$.

c $n = 30$ instellen en aflezen geeft $P(X = 15) = 0{,}0106$.

d

aantal rondes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
kans op helft raak	0,1029	0,0308	0,0106	0,0038	0,0014	0,0005	0,0002	0,0001	0	0

e Uit de tabel zie je dat die uitspraak onjuist is.

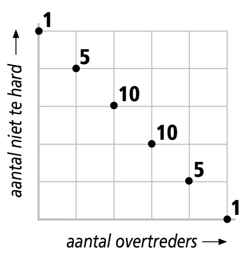
f Deze uitspraak klopt wél. Een steeds groter gedeelte van de verdeling komt rechts van het midden te liggen.

Test jezelf

bladzijde 108

T-1a Automobilisten kunnen te hard rijden of zich aan de maximumsnelheid houden. Er zijn dus steeds twee mogelijkheden als een willekeurige automobilist wordt gecontroleerd. De kans op te hard rijden is steeds 0,2 omdat 20% van de automobilisten zich niet aan de maximumsnelheid houdt. Het aantal snelheidsovertreders in een steekproef van 5 is binomiaal verdeeld met parameters $n = 5$ en $p = 0{,}2$.

b



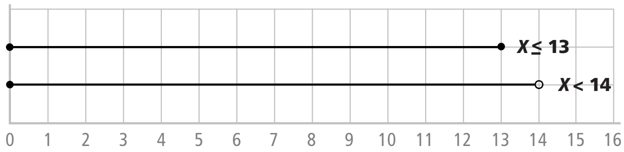
c Deze kans is $P(X = 2) = 10 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^3 = 0{,}2048$. Het aantal routes (10) is afkomstig uit bovenstaand overzicht.

T-2a Je kunt $P(X=3)$ berekenen met de formule $\binom{20}{3} \cdot 0{,}03^3 \cdot 0{,}97^{17}$ of met $\text{binompdf}(20;\ 0{,}03;\ 3)$.

b $\binom{20}{3} = 20 \text{ nCr } 3 = 1140$, dus $P(X=3) = 1140 \cdot 0{,}03^3 \cdot 0{,}97^{17} \approx 0{,}0183$. Natuurlijk levert de binompdf-formule hetzelfde resultaat op.

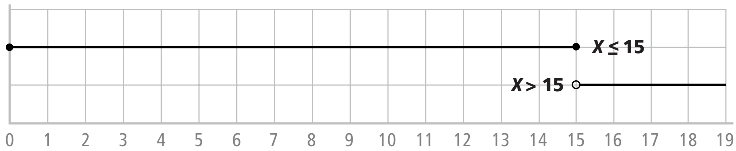
c 20% van de reigers in de steekproef betekent 4 reizigers. De gevraagde kans is $P(X=4) = \text{binompdf}(20;\ 0{,}03;\ 4) \approx 0{,}0024$.

T-3a



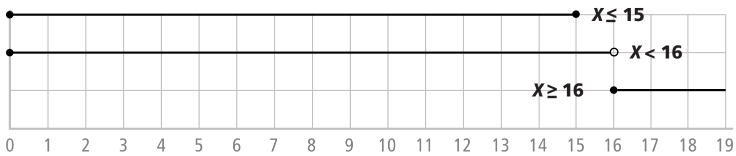
De kans op rood is $\frac{165}{300} = 0{,}55$. Dus $P(X \le 13) = \text{binomcdf}(30;\ 0{,}55;\ 13) \approx 0{,}1356$

b



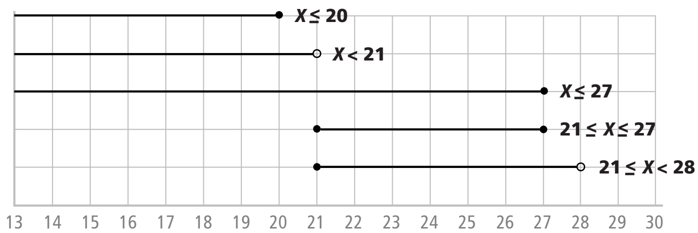
$1 - P(X \le 15) = 1 - \text{binomcdf}(30;\ 0{,}55;\ 15) \approx 0{,}6448$

c



$1 - P(X \le 15) = \text{binomcdf}(30;\ 0{,}55;\ 15) \approx 0{,}6448$

d



$P(X \le 27) - P(X \le 20) = \text{binomcdf}(30;\ 0{,}55;\ 27) - \text{binomcdf}(30;\ 0{,}55;\ 20) \approx 0{,}0694$

T-4a Precies een zes betekent 8 fouten. Het aantal fouten is binomiaal verdeeld met parameters $n = 20$ (het aantal vragen waarop wordt gegokt) en $p = \frac{3}{4}$, de kans op een fout antwoord bij gokken bij vierkeuzevragen. $P(X=8) = \text{binompdf}(20;\ 0{,}75;\ 8) \approx 0{,}0008$.

b $P(X \le 8) = \text{binomcdf}(20;\ 0{,}75;\ 8) \approx 0{,}0009$, slechts heel weinig groter dan het antwoord bij a.

c Eric gokt 15 vragen en haalt een zes of meer, dus is het aantal fouten ≤ 8. $P(X \le 8) = \text{binomcdf}(15;\ 0{,}75;\ 8) \approx 0{,}0566$

d Minstens 5,5 betekent hoogstens 9 fout. Judith gokt alle vragen maar heeft een kans op een fout antwoord van $p = \frac{1}{2}$. $P(X \le 9) = \text{binomcdf}(20;\ 0{,}5;\ 9) \approx 0{,}4119$

T-5 Het aantal zwartrijders onder de 80 treinreizigers in de steekproef is binomiaal verdeeld met parameters $n = 80$ en $p = 0{,}03$. De verwachting van het aantal zwartrijders is dan $n \cdot p = 2{,}4$.

bladzijde 109

T-6a De kans p op fabricagefout is 0,007. $P(X \leq 3) = \text{binomcdf}(500;\ 0,007;\ 3) \approx 0,5362$

b $P(7 < X < 12) = P(7 < X \leq 11) = P(X \leq 11) - P(X \leq 7) =$
$\text{binomcdf}(1500;\ 0,007;\ 11) - \text{binomcdf}(1500;\ 0,007;\ 7) \approx 0,4614$

c De kans dat de eerste 19 beeldbuizen geen fabricagefouten hebben is $0,997^{19} \approx 0,8751$.

d Deze kans is 0,993 en heeft niets te maken met wat er met de voorgaande 19 is gebeurd.

e Nu is $n = 1000$ en nog steeds $p = 0,007$. Van duizend beeldbuizen zullen er naar verwachting $n \cdot p = 7$ defect zijn.

T-7a Hier is $n = 60$ en $p = 0,005$ (kans op lager gewicht). $P(X = 0) = 0,995^{60} \approx 0,7403$

b Het aantal te lichte pakken dat je in een doos kunt verwachten is $n \cdot p = 60 \cdot 0,005 = 0,3$.

c Volgens opdracht a is een doos in orde met kans 0,7403. De kans dat een doos moet worden afgekeurd is dus 0,2597. Als er 20 dozen worden geïnspecteerd zullen naar verwachting $n \cdot p = 20 \times 0,2597 = 5,194$ dozen worden afgekeurd.

T-8a X is het aantal wiskundeleraren in de steekproef dat tegenstander van verplichte wiskunde is. Als de minister gelijk heeft is X binomiaal verdeeld met parameters $n = 50$ en $p = 0,15$. $P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - \text{binomcdf}(50;\ 0,15;\ 10) \approx 0,1199$ en $P(X > 13) = 1 - P(X \leq 13) = 1 - \text{binomcdf}(50;\ 0,15;\ 13) \approx 0,0132$

b Je verwacht (over liever: de minister verwacht) $n \cdot p = 50 \times 0,15 = 7,5$ tegenstanders in de steekproef.

c Ten eerste is dat 32% van de steekproef en dat is van een heel andere orde dan 15%. Ten tweede is de kans op $X = 16$ en hoger buitengewoon klein als de minister gelijk zou hebben: $P(X \geq 16) = 1 - P(X \leq 15) = 1 - \text{binomcdf}(50;\ 0,15;\ 15) \approx 0,0019$.

d Nu is $n = 100$. $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - \text{binomcdf}(100;\ 0,15;\ a) \approx 0,90$. Voer $Y1 = 1 - \text{binomcdf}(100;\ 0,15;\ X)$ in op de rekenmachine. Pas op: X in de laatste formule speelt nu de rol van de *a* die we zoeken. Met TBLSET en TABLE vind je na enig zoekwerk:

X	Y1	
15	.43168	
16	.32754	
17	.23672	
18	.16283	
19	.10654	
20	.06632	
21	.03928	

X=19

Kennelijk was het aantal tegenstanders 19, dus 19%. Dat scheelt niet spectaculair veel van 15%. Ook omdat $P(X > 19) \approx 0,10$, wat niet erg klein is, is er hier minder aanleiding om aan de bewering van de minister te twijfelen dan bij het bliksemonderzoek.