Hoofdstuk 6 - Differentiëren

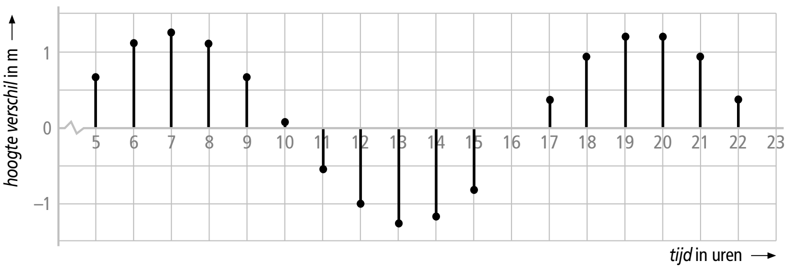
Bladzijde 126

1a Het water steeg het hardst op de tijdstippen waarbij de grafiek het steilst loopt. Dat is om ongeveer 7 uur 's ochtends en om 7 uur 's avonds

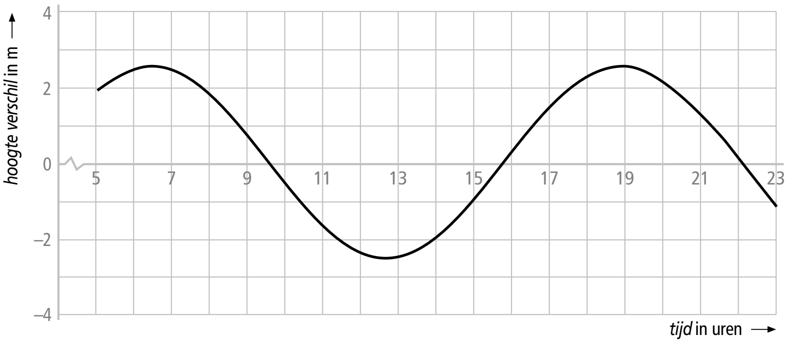
b Die daling verliep niet steeds even snel, want dan zou de grafiek overal even steil zijn en dus een rechte lijn zijn.

c Om 10 uur, 16 uur en 22 uur werden de hoogste en laagste waterstanden bereikt. Op die tijdstippen daalde of steeg het water niet.

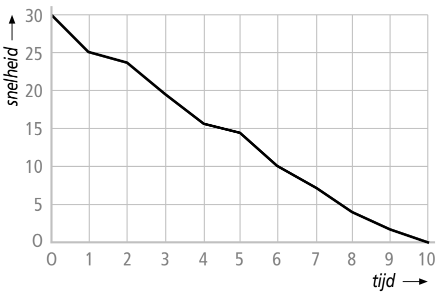
d



e



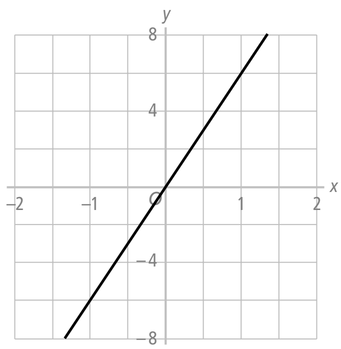
2a



b Langs de horizontale as hoort de tijd in seconden en langs de verticale as de snelheid in meter per seconde.

c Als de auto tot stilstand is gekomen dan is de snelheid gelijk aan nul meter per seconde. Je moet dus kijken waar de zojuist getekende grafiek de horizontale as snijdt.

3a



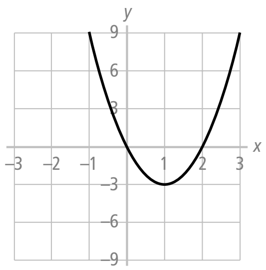
b Waar de grafiek van de afgeleide boven de horizontale as ligt is de helling positief en daar stijgt de grafiek van *f*.

4 Aan de hellinggrafiek van *f* kun je zien dat de grafiek van *f* links van $x = -3$ daalt, want daar is de helling negatief. Rechts van $x = -3$ is de helling positief en daar stijgt de grafiek van *f*, want daar ligt de grafiek van *f* boven de *x*-as. Bij de overgang van dalen naar stijgen ligt het laagste punt van de grafiek van *f*.

Bladzijde 127

5a

x	*helling*
–3	45
–2	24
–1	9
0	0
1	–3
2	0
3	9



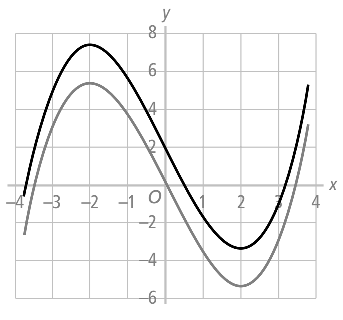
b Waar de helling gelijk is aan nul liggen de toppen van de grafiek. Dat is bij $x = 0$ en bij $x = 2$.

c De grafiek van de afgeleide ligt boven de *x*-as als $x < 0$ en als $x > 2$. Daar is de helling positief en stijgt de grafiek.

6a De nulpunten van de hellingfunctie zijn de *x*- coördinaten van de toppen van de grafiek van *f*.

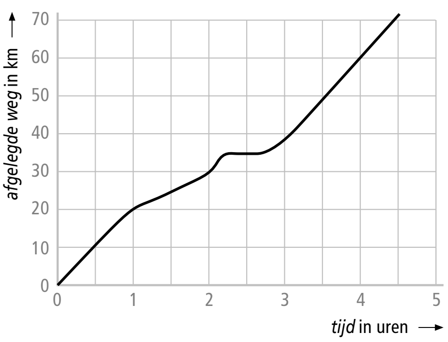
b Bij het punt op de hellinggrafiek met *x*- coördinaat nul is de helling een negatief getal. Daar daalt de grafiek van *f* en is er dus geen top.

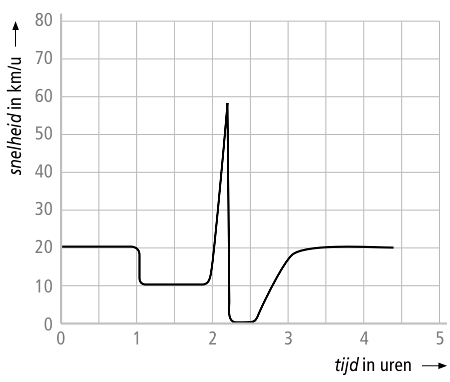
c,d



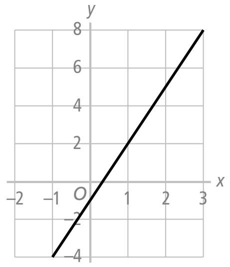
7a Dat punt zal zijn halverwege de afdaling en net voor hij ten val komt.

b,c

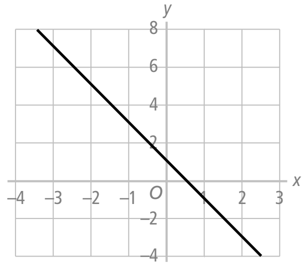




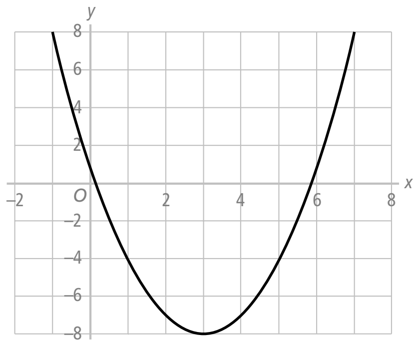
8 Bij de linker hellinggrafiek



Bij de middelste hellinggrafiek



Bij de rechter hellinggrafiek



Bladzijde 128

9a Waar de hellinggrafiek de horizontale as snijdt is een punt met helling nul. Daar is ook de top van *f*.

b Het differentiequotiënt is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2{,}01^2 - 2^2}{0{,}01} = 4{,}01$. In het punt (2, 4) van de grafiek van *f* is de helling gelijk aan vier. Als je nauwkeurig de raaklijn tekent en de helling afleest, zie je dat dit klopt.

c Het differentiequotiënt is gelijk aan $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3{,}01^2 - 3^2}{0{,}01} = 6{,}01$ dus de helling in het punt (3, 9) is bij benadering gelijk aan 6. Ook nu kun je weer de raaklijn tekenen en de helling aflezen.

d Je hebt twee keer een benadering uitgerekend op een klein interval. Je kunt daaruit zo maar niet de conclusie trekken dat het altijd klopt. Bovendien zijn benaderingen geen exacte antwoorden.

10a In de tabel is voor Δx achtereenvolgens gekozen: 0,01; 0,001; 0,0001; 0,00001.

b Hoe kleiner Δx , hoe kleiner het interval waarop je het differentiequotiënt uitrekent en dus ook des te nauwkeuriger de benadering.

c

interval	*differentiequotiënt*
[2; 2,01]	4,01
[2; 2,001]	4,001
[2; 2,0001]	4,0001
[2; 2,00001]	4,00001

Bladzijde 129

11a $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2+\Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x} = \frac{4 + 4\cdot\Delta x + (\Delta x)^2 - 4}{\Delta x} = \frac{4\cdot\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{4\cdot\Delta x}{\Delta x} + \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = 4 + \Delta x$

b Als Δx naar nul nadert, nadert het differentiequotiënt naar de exacte helling. Aan de uitdrukking van opdracht 11a kun je zien dat die exacte helling gelijk is aan 4.

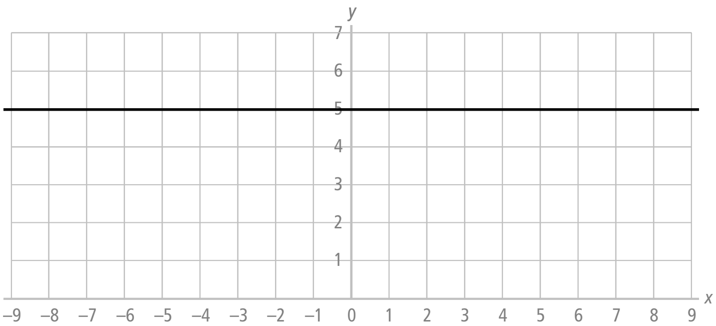
c $f(3+\Delta x) = (3+\Delta x)^2 = 3 + 6\cdot\Delta x + (\Delta x)^2$

d Als je het differentiequotiënt uitrekent op het interval $[3, 3+\Delta x]$ krijg je
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(3+\Delta x)^2 - 3^2}{\Delta x} = \frac{9 + 6\cdot\Delta x + (\Delta x)^2 - 9}{\Delta x} = \frac{6\cdot\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{6\cdot\Delta x}{\Delta x} + \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = 6 + \Delta x$
Als Δx naar nul nadert, nadert het differentiequotiënt naar 6, de exacte helling in het punt (3, 9).

12 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$
$= \frac{2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{2x\cdot\Delta x}{\Delta x} + \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$.

Als Δx naar nul nadert, dan nadert het differentiequotiënt naar $2x$. Dus geldt $f'(x) = 2x$.

13a



b Een passende formule is $y = 5$.

c De grafiek van g is een rechte lijn, dus in elk punt is de helling even groot. Aan het hellingsgetal kun je zien dat de helling overal gelijk is aan 5. De formule is dus $g'(x) = 5$

d Het differentiequotiënt is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5(x+\Delta x) + 3 - (5x+3)}{\Delta x} = \frac{5x + 5\cdot\Delta x + 3 - 5x - 3}{\Delta x} =$
$\frac{5\cdot\Delta x}{\Delta x} = 5$

e De exacte helling is dus gelijk aan 5, want in de uitdrukking van opdracht 13d komt geen Δx meer voor.

14a $f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^3 = (x+\Delta x)^2(x+\Delta x) = (x^2 + 2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2)(x+\Delta x) =$
$= x^3 + 3x^2\cdot\Delta x + 3x\cdot(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$.

b Uit het antwoord op opdracht 14a volgt:
$f(x+\Delta x) = x^3 + 3x^2\cdot\Delta x + 3x\cdot(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 = f(x) + 3x^2\cdot\Delta x + 3x\cdot(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$.
Als je de eerste term achter het "= " teken naar de linkerkant brengt, krijg je
$f(x+\Delta x) - f(x) = 3x^2\cdot\Delta x + 3x\cdot(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$

c Deel beide kanten van de vergelijking uit opdracht 14b door Δx en je krijgt
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x^2\cdot\Delta x + 3x\cdot(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = \frac{3x^2\cdot\Delta x}{\Delta x} + \frac{3x\cdot(\Delta x)^2}{\Delta x} + \frac{(\Delta x)^3}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2$.

d Als je in de uitdrukking van opdracht 14c Δx naar nul laat naderen, dan naderen de laatste twee termen naar nul en dus geldt $f'(x) = 3x^2$.

Bladzijde 130

15a

X	Y1	Y2
.5	.70711	.70711
.6	.7746	.6455
.7	.83666	.59761
.8	.89443	.55902
.9	.94868	.52705
1	1	.5
1.1	1.0488	.47673

X=1.1

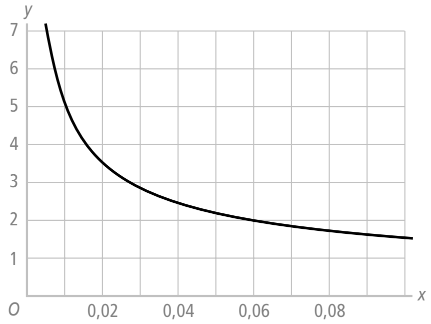
b

X	Y1	Y2
0	0	ERROR
.01	.1	5.0063
.02	.14142	3.5366
.03	.17321	2.8872
.04	.2	2.5002
.05	.22361	2.2362
.06	.24495	2.0413

X=0

Aan de tabel kun je zien dat de helling in de buurt van $x = 0$ een getal is dat steeds groter wordt als je meer verfijnt. Het vermoeden is dus dat die helling in de oorsprong zelf oneindig groot is.

c



16a Voor Δx zijn achtereenvolgens gekozen: 0,01; 0,001; 0,0001 en 0,00001.

b

interval	*differentiequotiënt*
[0; 0,01]	10
[0; 0,001]	31,6227766
[0; 0,0001]	100
[0; 0,00001]	316,227766

c Hoe kleiner Δx gekozen wordt, des te nauwkeuriger is de benadering.

d $$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sqrt{0+\Delta x} - \sqrt{0}}{\Delta x} = \frac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\sqrt{\Delta x}}{(\sqrt{\Delta x})^2} = \frac{1}{\sqrt{\Delta x}}$$

e Als Δx naar nul nadert, dan wordt de noemer steeds kleiner en daarmee neemt het differentiequotiënt onbeperkt toe.

f Je kunt zeggen dat de helling in de oorsprong oneindig groot is. In de oorsprong heeft de grafiek dan ook een verticale raaklijn.

17 In de onderstaande tabel kun je zien dat de helling in het randpunt steeds groter wordt als je het interval steeds kleiner maakt. Je kunt de helling in het randpunt niet uitrekenen. De helling in het punt P is oneindig groot.

interval	*differentiequotiënt*
[4; 4,01]	10
[4; 4,001]	31,6227766
[4; 4,0001]	100
[4; 4,00001]	316,227766

Bladzijde 131

18a De horizontale asymptoot is de x-as met vergelijking $y = 0$ en de verticale asymptoot is de y-as met als vergelijking $x = 0$.

b In de tabel hieronder kun je zien dat de hellingen in de buurt van 0 heel kleine, negatieve getallen zijn.

interval	*differentiequotiënt*
[0,01; 0,02]	–5000
[0,001; 0,002]	–500 000
[0,0001; 0,0002]	–50 000 000
[0,00001; 0,00002]	–5 000 000 000

19a Het interval $[0, \Delta x]$ kun je niet gebruiken omdat je dan onder andere $f(0)$ uit moet rekenen, maar het getal nul hoort niet bij het domein van de functie.

b Voor Δx is achtereenvolgens gekozen: 0,1; 0,01; 0,001 en 0,0001.

c

interval	*differentiequotiënt*
[0,1; 0,2]	–50
[0,01; 0,02]	–5000
[0,001; 0,002]	–500 000
[0,0001; 0,0002]	–50 000 000

d Die helling wordt een steeds kleiner negatief getal als je dichter bij de y-as in de buurt komt.

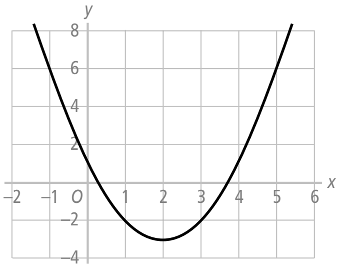
20a,b $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{2\Delta x} - \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{2\Delta x} - \frac{2}{2\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\frac{-1}{2\Delta x}}{\Delta x} = \frac{-1}{2(\Delta x)^2}$$

c Als Δx naar nul nadert, wordt de noemer van de breuk een heel klein getal, terwijl de teller constant -1 is. Het differentiequotiënt wordt dus een heel klein negatief getal.

21 In de buurt van de horizontale asymptoot is de helling van een gebroken functie een getal heel dicht in de buurt van nul. Het kan een positief, maar ook een negatief getal zijn.

Bladzijde 132

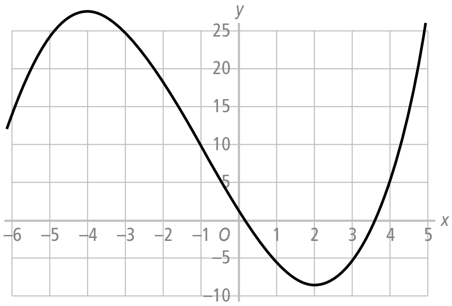
22a Het nulpunt van de hellingfunctie betekent voor de grafiek van f dat daar een top is . Die top geeft een laagste punt van de grafiek van f . Dit kun je als volgt inzien: links van het nulpunt is de helling negatief en de grafiek van f daalt daar dus en rechts van het nulpunt is de helling positief en stijgt de grafiek van f . Waar dalen overgaat in stijgen bevindt zich de top.

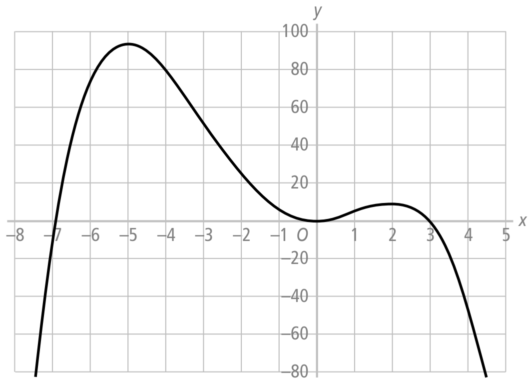
b 

c Als je grafiek van *f* die bij opdracht 22b is getekend, naar boven of naar beneden verschuift blijft voor elke waarde van *x* de helling gelijk. Met andere woorden: bij zo'n (verschoven) grafiek hoort dezelfde hellinggrafiek als die van *f*.

23a Je moet letten op de nulpunten van de hellingfunctie. Als de helling in zo'n nulpunt van teken wisselt, heeft de bijbehorende grafiek een top. De grafiek van *f* heeft dus toppen bij $x = -4$ en bij $x = 2$. De grafiek van *g* heeft toppen bij $x = -5$, $x = 0$ en $x = 2$.

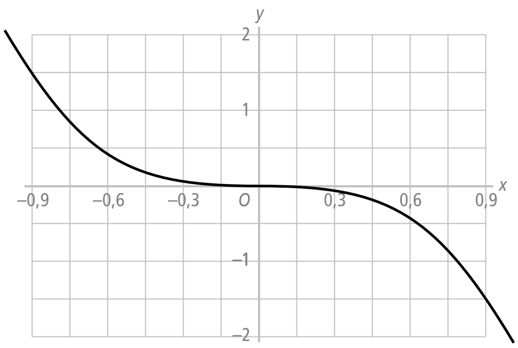
b De grafiek van een mogelijke functie *f*: De grafiek van een mogelijke functie *g*:





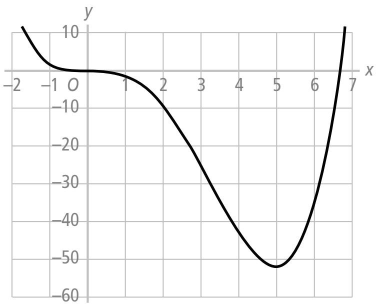
c Dat komt omdat er niet één maar een heleboel functies dezelfde hellinggrafiek hebben. Bedenk dat je de grafiek van een functie verticaal kunt verschuiven; daarbij veranderen de hellingen niet.

24a Voor $x = -1$ daalt de grafiek van *f*, want de helling is daar negatief. Voor $x = 1$ daalt de grafiek ook om dezelfde reden.

b 

c Bij $x = 0$ is er geen top want alle *x*- waarden in de buurt van $x = 0$ geven negatieve hellingen dus de grafiek van *f* daalt alleen maar in de buurt van $x = 0$. Bij $x = 5$ is wel een top want daar wisselt de helling van teken (van negatief naar positief) en dus gaat de grafiek van *f* daar over van dalend naar stijgend.

d

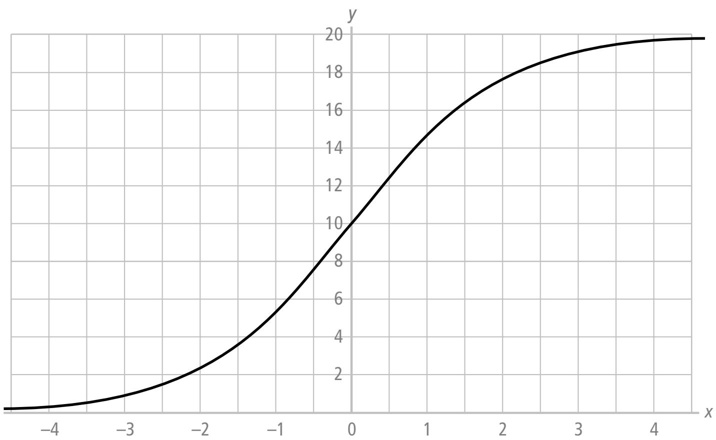


e Als je de grafiek van *f* verticaal verschuift, blijft de helling in elk punt ongewijzigd. Daarom hoort bij zo'n verschoven grafiek dezelfde hellinggrafiek.

25a Alle hellingen zijn dus positieve getallen. Daaruit kun je afleiden dat de functie *g* overal stijgend is.

b Voor waarden van *x* die ver van nul af liggen (positief zowel als negatief) is de helling vrijwel nul. Daar loopt de grafiek van *g* dus vrijwel horizontaal.

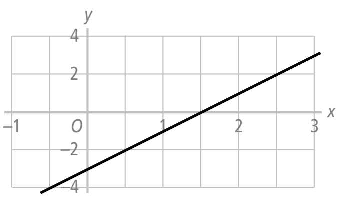
c



Bladzijde 133

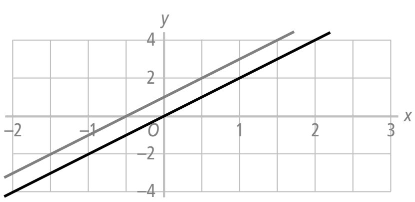
26a $f'(x) = 2$

b

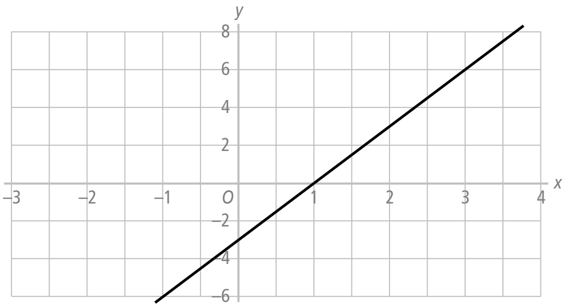


c Het functievoorschrift is $f(x) = 2x - 3$.

d Hieronder zijn de grafiek getekend van de functies $f(x) = 2x + 1$ en $f(x) = 2x$.

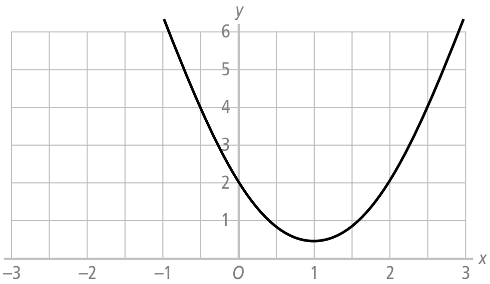


27a



b Bij $x=1$ heeft de hellinggrafiek een nulpunt en de helling wisselt daar van teken. Hier uit kun je afleiden dat de grafiek van g in de buurt van $x=1$ overgaat van dalen naar stijgen. De grafiek van g heeft dus een top.

c



d De vorm lijkt op de vorm van de standaardgrafiek $y=x^2$.

e Een passend functievoorschrift is $g(x)=1\frac{1}{2}x^2-3x+1$.

28a Die hellingfunctie heeft het voorschrift $f'(x)=2x-4$.

b Een functie die daarbij past is bijvoorbeeld $g(x)=\frac{1}{3}x^3$.

c Ook functies zoals $g(x)=\frac{1}{3}x^3-4$ of $g(x)=\frac{1}{3}x^3+5$ hebben dezelfde afgeleide functie.

29a $f'(x)=x$ en $g'(x)=-3$

b Bijvoorbeeld $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ en $g(x)=-3x+2$.

30a $F(x)=2x^2$

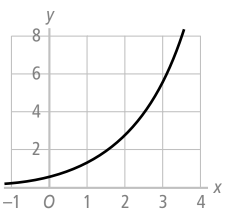
b $F(x)=-\frac{1}{2}x^4+3$

c $F(x)=2x^5-1$

d $F(x)=-2x+4$

Bladzijde 134

31b



c De vorm van de hellinggrafiek maakt duidelijk dat de helingfunctie waarschijnlijk ook weer een exponentiële functie is.

32a $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{2^{3,01}-2^3}{0,01}\approx 5,56444$. De uitkomst is iets groter dan die uit de tabel naast opdracht 31.

b Uit de onderstaande tabel leid je af dat de uitkomsten heel dicht bij elkaar liggen.

△x	*breuk*
0,1	0,71773
0,01	0,69797
0,001	0,69339
0,0001	0,69317

c $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2^{x+\Delta x} - 2^x}{\Delta x} = \frac{2^x \cdot 2^{\Delta x} - 2^x}{\Delta x} = \frac{2^x(2^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = 2^x \cdot \frac{2^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$

d Als Δx naar nul nadert, gaat de breuk steeds meer lijken op een getal in de buurt van 0,693 en dus geldt $f'(x) \approx 0,693 \cdot 2^x$.

e De groeifactor van f' is ook 2 en de beginhoeveelheid is ongeveer gelijk aan 0,693.

33 Op dezelfde manier als in opdracht 32c blijkt dat

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3^{x+\Delta x} - 3^x}{\Delta x} = \frac{3^x \cdot 3^{\Delta x} - 3^x}{\Delta x} = \frac{3^x(3^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = 3^x \cdot \frac{3^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$

Je maakt weer een tabel van de waarden van de breuk $\frac{3^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$:

△x	*breuk*
0,1	1,1612
0,01	1,1047
0,001	1,0992
0,0001	1,0987

De kleinste waarde van Δx geeft de nauwkeurigste benadering van de afgeleide.

$h'(x) \approx 1,0987 \cdot 3^x$

Bladzijde 135

34a

x	*y*	*helling*
0	1	–0,6929
1	0,5	–0,3465
2	0,25	–0,1732
3	0,125	–0,0866
4	0,0625	–0,0433
5	0,03125	–0,0217
6	0,01563	–0,0108
7	0,00781	–0,0054
8	0,00391	–0,0027
9	0,00195	–0,0014
10	0,00098	–0,0007

b Je krijgt het vermoeden dat de hellingfunctie weer een exponentiële functie is. De grafiek lijkt op de grafiek van g als je die spiegelt in de x-as.

c Uit de tabel volgt dat de groeifactor van de hellingfunctie weer $\frac{1}{2}$ is. De beginhoeveelheid $-0,6926$ lees je af bij $x = 0$.

d Vermoedelijk is $g'(x) = -0,6926 \cdot (\frac{1}{2})^x$

e Voor het bewijs bereken je het differentiequotiënt op het interval $[x, x + \Delta x]$.

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(\frac{1}{2})^{x+\Delta x} - (\frac{1}{2})^x}{\Delta x} = \frac{(\frac{1}{2})^x \cdot (\frac{1}{2})^{\Delta x} - (\frac{1}{2})^x}{\Delta x} = \frac{(\frac{1}{2})^x((\frac{1}{2})^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = (\frac{1}{2})^x \cdot \frac{(\frac{1}{2})^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$

In de breuk van de laatste uitdrukking moet je Δx naar nul laten naderen. Als je voor Δx een heel klein getal neemt ,bijvoorbeeld 0,001, dan krijgt de breuk een waarde die ongeveer gelijk is aan $-0,6926$. Daarmee is het bewijs geleverd.

35a $f'(x) \approx 1{,}6094 \cdot 5^x$ en $g'(x) \approx -1{,}6094 \cdot (\frac{1}{5})^x$

b De startwaarden van beide afgeleiden zijn elkaars tegengestelden. Als je de grafieken van *f* en *g* bekijkt, blijkt dat overal de helling van de ene grafiek het tegengestelde is van de helling van de andere grafiek. Omdat dit voor elke waarde van *x* geldt, is de ene afgeleide ook het tegengestelde van de andere afgeleide.

c $f'(x) \approx 1{,}0986 \cdot 3^x$ en $g'(x) \approx -1{,}0986 \cdot (\frac{1}{3})^x$. Ook hier zijn de afgeleiden elkaars tegengestelde om dezelfde reden die in opdracht 35b is aangegeven.

d De afgeleiden zijn elkaars tegengestelde.

36 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 \cdot 5^{x+\Delta x} - 3 \cdot 5^x}{\Delta x} = \frac{3 \cdot 5^x (5^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = 3 \cdot 5^x \frac{(5^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$

Kies voor Δx de waarde 0,001 en voor *x* de waarde 0. Je krijgt dan een benadering van $f'(0)$. Je vindt $f'(0) \approx 24{,}142$

Bladzijde 136

37 Je moet de vergelijking $x(3-\sqrt{x}) = 0$ oplossen. Daaruit volgt $x = 0$ of $\sqrt{x} = 3$ dus $x = 0$ en $x = 9$ zijn de nulpunten.

b Als $f(x) < 0$ dan ligt de grafiek van *f* onder de *x*-as. Dit is het geval als $x > 9$.

c Er geldt: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(\sqrt{\Delta x}) - f(0)}{\Delta x} = \frac{3 \cdot \Delta x - \Delta x \cdot \sqrt{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{3 \cdot \Delta x}{\Delta x} - \frac{\Delta x \cdot \sqrt{\Delta x}}{\Delta x} = 3 - \sqrt{\Delta x}$.

d Als Δx naar nul nadert, dan nadert ook de uitdrukking $\sqrt{\Delta x}$ naar nul en dus nadert het differentiequotiënt naar 3.

e De helling van de raaklijn in de oorsprong is dus gelijk aan 3. De vergelijking van de raaklijn in *O* is dan $y = 3x$.

f Op het interval [9; 9,01] geldt: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(9{,}01) - f(9)}{0{,}01} \approx -1{,}50125$

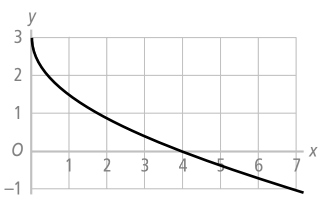
Op het interval [9; 9,001] geldt: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(9{,}001) - f(9)}{0{,}001} \approx -1{,}500125$

Op het interval [9; 9,0001] geldt: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(9{,}0001) - f(9)}{0{,}0001} \approx -1{,}5000125$

g Het vermoeden is dat de helling in punt *P* gelijk is aan $-1{,}5$.

h Een vergelijking van de raaklijn is $y = -1{,}5(x-9)$.

i



38a

t	1	2,3	$t+1$	$t+\Delta t$
$s(t)$	11	40,25	$6(t+1)+5(t+1)^2 =$ $5t^2+16t+11$	$6(t+\Delta t)+5(t+\Delta t)^2 =$ $5t^2+6t+6\cdot\Delta t+10t\cdot\Delta t+5\cdot(\Delta t)^2$

b $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t} = \frac{5t^2+6t+6\cdot\Delta t+10t\cdot\Delta t+5\cdot(\Delta t)^2-(6t+5t^2)}{\Delta t} =$

$= \frac{6\cdot\Delta t+10t\cdot\Delta t+5\cdot(\Delta t)^2}{\Delta t} = \frac{6\cdot\Delta t}{\Delta t}+\frac{10t\cdot\Delta t}{\Delta t}+\frac{5\cdot(\Delta t)^2}{\Delta t} = 6+10t+5\cdot\Delta t$

c Als Δt naar nul nadert, dan nadert het differentiequotiënt naar $6+10t$.

d In opdracht 38c heb je de afgeleide gevonden die op elk tijdstip de snelheid geeft van het vallende voorwerp in meter per seconde.

39 Het snijpunt met de y-as is het punt $(0, 1)$. De helling van de raaklijn in dat punt is gelijk aan $f'(0)$. De afgeleide waarde die je nodig hebt is precies de startwaarde van de afgeleide. Een benadering van de helling krijg je dus door voor Δx een klein getal (bijvoorbeeld 0,001) in te vullen in de breuk $\frac{(\frac{2}{3})^{\Delta x}-1}{\Delta x}$. Je vindt als uitkomst ongeveer $-0,4055$.

Bladzijde 137

40a $F'(x) = \frac{1}{4}\cdot 2x+3 = \frac{1}{2}x+3 = f(x)$

b De oppervlakte van de vierhoek is gelijk aan $4\times 2 = 8$ en de oppervlakte van de driehoek is gelijk aan $\frac{\text{basis} \times \text{hoogte}}{2} = \frac{4\cdot 2}{2} = 4$. De vierhoek $AKLD$ heeft dus als oppervlakte $8+4=12$.

c Als je voor x het getal –2 kiest, vallen de punten A en K samen. De vierhoek $AKLD$ is dan een lijnstuk. De oppervlakte is dan dus gelijk aan nul.

d Als je op dezelfde manier te werk gaat als in opdracht 40b, is de oppervlakte van de rechthoek gelijk aan $x+2$ en de breedte is gelijk aan 2. De oppervlakte van de rechthoek is dus $2(x+2) = 2x+4$.
De basis van de driehoek heeft lengte $x+2$ en de hoogte is het verschil van de y-coördinaten van de punten L en D. Dat verschil is $(\frac{1}{2}x+3)-2 = \frac{1}{2}x+1$. De oppervlakte van de driehoek is dus $\frac{(x+2)(\frac{1}{2}x+1)}{2} = \frac{\frac{1}{2}x^2+2x+2}{2} = \frac{1}{4}x^2+x+1$
De oppervlakte van vierhoek $AKLD$ is $(\frac{1}{4}x^2+x+1)+(2x+4) = \frac{1}{4}x^2+3x+5$

e $O'(x) = \frac{1}{4}.2x+3 = \frac{1}{2}x+3 = f(x)$, dus O is een primitieve van f.

f Omdat G een primitieve is van g moet voor elke waarde van x gelden dat $a\cdot 3x^2+b = \frac{1}{4}x^2+1$. Door beide uitdrukkingen te vergelijken vind je dat $3a = \frac{1}{4}$ dus $a = \frac{1}{12}$ en $b = 1$. Als je invult $x = -2$ krijg je $a\cdot(-2)^3+b\cdot -2+c = 0$. Dit geeft $-8a-2b+c = 0$ of $c = 8a+2b = 8\cdot\frac{1}{12}+2\cdot 1 = 2\frac{2}{3}$.

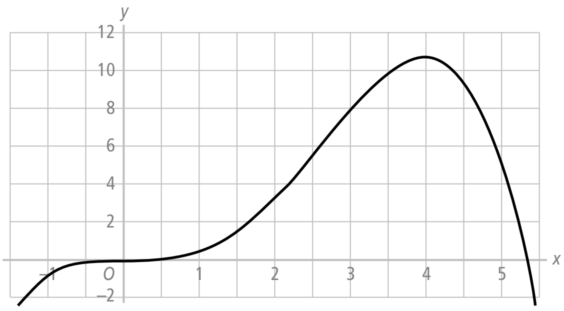
g Je moet voor x het getal 3 invullen om de oppervlakte van het vlakdeel te krijgen.

h De oppervlakte is gelijk aan $O(3) = \frac{1}{12}\cdot 3^3+3+2\frac{2}{3} = 7\frac{11}{12}$

41a De functie stijgt op het interval $\langle\leftarrow, 4\rangle$ en daalt op het interval $\langle 4, \rightarrow\rangle$.

b Bij $x = 4$ wisselt de helling van teken (links ervan is de helling negatief en rechts ervan positief). Dat betekent dat de functie bij $x = 4$ overgaat van dalend naar stijgend en dus is er een top. In de omgeving van $x = 0$ is de helling positief dus de functie stijgt daar alleen maar en er is geen overgang van stijgen naar dalen of andersom. Daarom is er geen top bij $x = 0$.

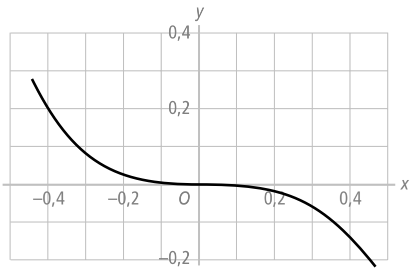
c



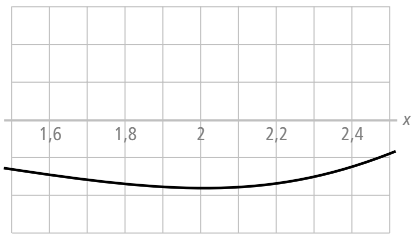
d De top in de hellinggrafiek is het punt op de grafiek van f met een maximale helling.

Bladzijde 140

T-1a



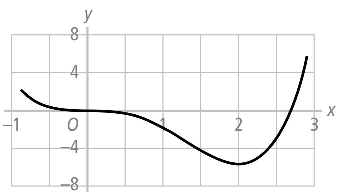
b



c In de buurt van $x = 0$ daalt de grafiek van f. Dat kun je zien omdat daar de hellingfunctie negatieve waarden aanneemt. In $x = 2$ wisselt de helling van teken. De grafiek van f gaat daar over van dalen naar stijgen en heeft bij $x = 2$ een top.

d Een interval waarop de functie stijgt is $\langle 2, \rightarrow \rangle$, want daar is de helling positief.

e



f Op het interval $\langle 1,2 \rangle$ is er een punt op de grafiek van f met minimale helling. De raaklijn loopt daar zo steil mogelijk achterover.

T-2a $(x+\Delta x)^4 = (x+\Delta x)^2(x+\Delta x)^2 = (x^2+2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2)(x^2+2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2) =$
$= x^4+2x^3\cdot\Delta x+x^2\cdot(\Delta x)^2+2x^3\cdot\Delta x+4x^2\cdot(\Delta x)^2+2x\cdot(\Delta x)^3+(\Delta x)^2\cdot x^2+2x\cdot(\Delta x)^3+(\Delta x)^4 =$
$= x^4+4x^3\cdot\Delta x+6x^2\cdot(\Delta x)^2+4x\cdot(\Delta x)^3+(\Delta x)^4$.

b $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 \cdot \Delta x + 3x^2 \cdot (\Delta x)^2 + 2x \cdot (\Delta x)^3 + \frac{1}{2}(\Delta x)^4 - \frac{1}{2}x^4}{\Delta x} =$

$= \frac{2x^3 \cdot \Delta x + 3x^2 \cdot (\Delta x)^2 + 2x \cdot (\Delta x)^3 + \frac{1}{2}(\Delta x)^4}{\Delta x} =$

$= \frac{2x^3 \cdot \Delta x}{\Delta x} + \frac{3x^2 \cdot (\Delta x)^2}{\Delta x} + \frac{2x \cdot (\Delta x)^3}{\Delta x} + \frac{\frac{1}{2}(\Delta x)^4}{\Delta x} =$

$= 2x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 2x \cdot (\Delta x)^2 + \frac{1}{2}(\Delta x)^3$.

c Als Δx naar nul nadert , nadert het differentiequotiënt naar $2x^3$. Alle overige termen bevatten één of meer factoren Δx en naderen dus allemaal naar nul.

T-3a De grafiek van functie *f* daalt op zijn domein. Dat betekent dat alle hellingen negatieve getallen zijn en dus ligt de hele hellinggrafiek onder de *x*-as.

b Op het interval [0,01: 0,4] : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0,4) - f(0,01)}{0,39} \approx -46,92$

Op het interval [0,01; 0,09] : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0,09) - f(0,01)}{0,08} \approx -169,17$

Op het interval [0,01; 0,04] : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0,04) - f(0,01)}{0,03} \approx -336,67$

c Als $x = 0,1$ dan is de helling $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0,101) - f(0,001)}{0,001} \approx -33,21$.

Als $0 < x < 0,1$ zijn de hellingen nog kleiner want de grafiek van *f* loopt daar nog steiler. De helling neemt dus waarden aan van het interval $\langle \leftarrow, -33,21 \rangle$.

d Het vermoeden is dat de helling van de grafiek in die punten een heel klein negatief getal is.

Bladzijde 141

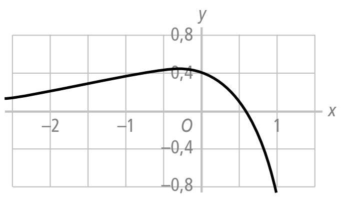
T-4a $F(x) = -3x^4$

b $G(x) \approx \frac{2^x}{0,693} \approx 1,443 \cdot 2^x$

c $H(x) = -2x$

d $K(x) = \frac{1}{2}x^6$

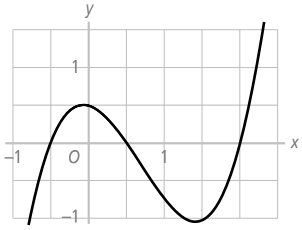
T-5a



b Je hebt geleerd dat de afgeleiden van 2^x , 3^x en 4^x exponentiële functies zijn met dezelfde groeifactor , maar met als startwaarde een getal dat van de groeifactor afhangt. In paragraaf 6-5 heb je de startwaarden van de afgeleiden van 2^x , 3^x en 4^x berekend en daarmee heb je a, b en *c* berekend. Dus $a = 0,693$, $b = 1,098$ en $c = 1,386$

c Je kunt met je rekenmachine de top van de grafiek van *f* bepalen, want daar is de helling gelijk aan nul. Je vindt als top het punt (0,592; 1,152). De gevraagde waarde van *x* is dus 0,592.

T-6a



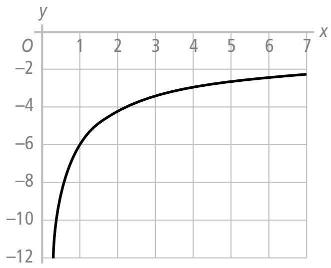
b Dan gebeurt er met de hellinggrafiek niets: voor elke waarde van x blijft de helling gelijk.

c In de buurt van $x = 0$ heeft de hellinggrafiek een top, dus heeft de grafiek van g een punt met een maximale helling. Op dezelfde manier kun je aan het dal in de hellinggrafiek zien dat de grafiek van g tussen $x = 1$ en $x = 2$ een punt heeft met een minimale helling.

d Dat zijn de nulpunten van de hellingfunctie.

T-7a Het domein van h is $\langle 0, \rightarrow \rangle$.

b



c De asymptoten van de grafiek van h zijn de lijnen $x = 0$ en $y = 0$.

d Het domein van de hellingfunctie is $\langle 0, \rightarrow \rangle$, want voor elke waarde van x uit het domein van h kun je de helling berekenen. Het bereik van de hellingfunctie is het interval $\langle 0, \rightarrow \rangle$, want alle hellingen zijn positief terwijl de helling steeds meer afneemt als x toeneemt. Op den duur wordt de helling bijna gelijk aan nul.