Hoofdstuk 8 - Combinaties met sinus

8.1 Afgeleiden

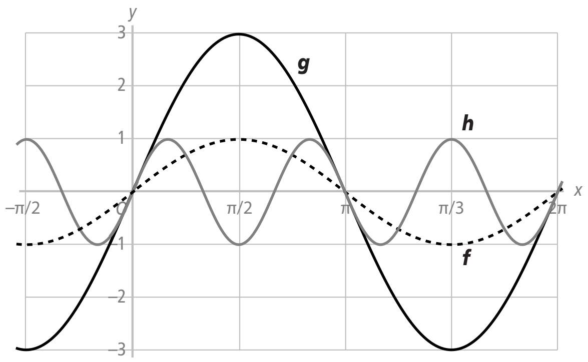
bladzijde 152

1a Uit de formule voor de omtrek van een cirkel (omtrek = $2\pi r$) volgt dat een volledige cirkel (360°) overeenkomt met 2π radialen. Een halve cirkel (180°) komt dus overeen met π radialen.

b

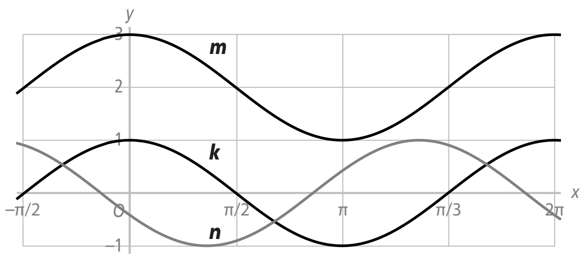
Graden	180	1	72	320
Radialen	π	$\frac{1}{180}\pi$	$\frac{72}{180}\pi = \frac{2}{5}\pi$	$\frac{320}{180}\pi = \frac{16}{9}\pi$

2a



De grafiek van *g* ontstaat uit die van *f* door een vermenigvuldiging ten opzichte van de *x*-as met factor 3. De grafiek van *h* ontstaat uit die van *f* door een vermenigvuldiging ten opzichte van de *y*-as met factor $\frac{1}{3}$.

b



De grafiek van *m* ontstaat uit die van *k* door een verschuiving 2 omhoog. De grafiek van *n* ontstaat uit die van *k* door een verschuiving 2 naar links.

3a De grafiek van *f* ontstaat uit de grafiek van $y = \sin x$ door een vermenigvuldiging ten opzichte van de *x*-as met factor 2 en een verschuiving 1 omhoog. De grafiek heeft amplitude 2, evenwichtsstand $y = 1$ en periode 2π .

b De grafiek van *g* ontstaat uit de grafiek van $y = \cos x$ door een vermenigvuldiging ten opzichte van de *x*-as met factor 2 en een vermenigvuldiging ten opzichte van de *y*-as met factor $\frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$. De grafiek heeft amplitude 2, evenwichtsstand $y = 0$ en periode $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$.

c De grafiek van *h* ontstaat uit de grafiek van $y = \sin x$ door een vermenigvuldiging ten opzichte van de *y*-as met factor $\frac{1}{0,3\pi} = \frac{10}{3\pi}$. De grafiek heeft amplitude 1, evenwichtsstand $y = 0$ en periode $\frac{2\pi}{0,3\pi} = 6\frac{2}{3}$.

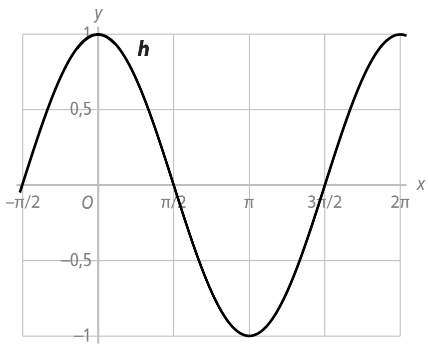
d De grafiek van k ontstaat uit de grafiek van $y = \cos x$ door een vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met factor 3, een vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met factor $\frac{1}{2\pi}$ en een verschuiving 5 omhoog. De grafiek heeft amplitude 3, evenwichtsstand $y = 5$ en periode $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

e De grafiek van l ontstaat uit de grafiek van $y = \cos x$ door een vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met factor 5, een vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met factor $\frac{1}{\pi}$ en een verschuiving π naar rechts. De grafiek heeft amplitude 5, evenwichtsstand $y = 0$ en periode $\frac{2\pi}{\pi} = 2$.

f De grafiek van m ontstaat uit de grafiek van $y = \sin x$ door een vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met factor $\frac{1}{0,4} = 2\frac{1}{2}$ en een verschuiving 2 naar links. De grafiek heeft amplitude 1, evenwichtsstand $y = 0$ en periode $\frac{2\pi}{0,4} = 5\pi$.

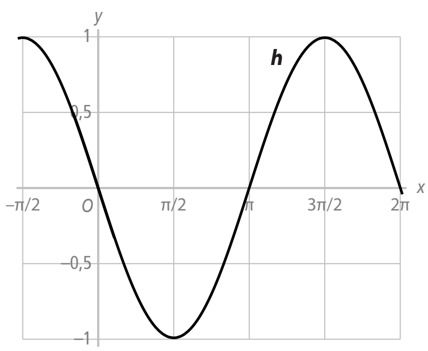
bladzijde 153

4a Hellingfunctie $\approx \dfrac{f(x+0.001) - f(x)}{0.001} = \dfrac{\sin(x+0.001) - \sin x}{0.001}$



b $f'(x) = \cos x$

c Hellingfunctie $\approx \dfrac{h(x+0.001) - h(x)}{0.001} = \dfrac{\cos(x+0.001) - \cos x}{0.001}$



$h'(x) = -\sin x$

5a $f'(x) = -5\sin x$

b $g'(t) = 2\cos 2x$

c $k'(x) = 1 + \cos x + \sin x$

d $l'(x) = 3 \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 6\sin x \cos x$

6a $k'(x) = -\frac{1}{2}\sin(2\pi x)\cdot 2\pi = -\pi\sin 2\pi x$

b $u'(x) = -3\cos(\pi x)\cdot\pi = -3\pi\cos\pi x$

c $h'(x) = 3\cdot\sin(5x) + 3x\cdot\cos(5x)\cdot 5 = 3\sin 5x + 15x\cos 5x$

d $r'(x) = 2\cdot\cos\frac{1}{2}x + 2x\cdot -\sin(\frac{1}{2}x)\cdot\frac{1}{2} = 2\cos\frac{1}{2}x - x\sin\frac{1}{2}x$

e $q'(x) = -3\cdot\cos 4x - 3x\cdot -\sin(4x)\cdot 4 = -3\cos 4x + 12x\sin 4x$

f $p'(x) = 2x\sin x + (x^2+3)\cdot\cos x$

7a $y = ax + b$ met $a = f'(2\pi)$ waarbij $f'(x) = 2\cos x$ en dus $a = 2\cos 2\pi = 2$. Invullen geeft $y = 2x + b$ en samen met de coördinaten (2π , 0) levert dit $0 = 2\cdot 2\pi + b$ en dus $b = -4\pi$.
De vergelijking van de lijn *r* is $y = 2x - 4\pi$.

b $f'(x) = 1$ oplossen geeft $2\cos x = 1$, waaruit volgt $\cos x = \frac{1}{2}$ en dus $x = \frac{1}{3}\pi$ of $x = 1\frac{2}{3}\pi$.
Het gaat dus om de raaklijnen in de punten ($\frac{1}{3}\pi$, $\sqrt{3}$) en ($1\frac{2}{3}\pi$, $-\sqrt{3}$).
Raaklijn 1: $y = ax + b$ met $a = 1$. Invullen geeft $y = x + b$ en samen met de coördinaten ($\frac{1}{3}\pi$, $\sqrt{3}$) levert dit $\sqrt{3} = \frac{1}{3}\pi + b$ en dus $b = \sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi \approx 0{,}68$. Voor raaklijn 1 geldt dus $y = x + 0{,}68$.
Raaklijn 2: $y = ax + b$ met $a = 1$. Invullen geeft $y = x + b$ en samen met de coördinaten ($1\frac{2}{3}\pi$, $-\sqrt{3}$) levert dit $-\sqrt{3} = 1\frac{2}{3}\pi + b$ en dus $b = -\sqrt{3} - 1\frac{2}{3}\pi \approx -6{,}97$.
Voor raaklijn 1 geldt dus $y = x - 6{,}97$.

8a De helling van de lijn $y = 3x$ in het punt $(0, 0)$ is 3. De lijn raakt de grafiek van f in het punt $(0, 0)$, dus moet gelden $f'(0) = 3$. $f'(x) = a\cdot\cos(bx)\cdot b = ab\cos bx$ en dus $f'(0) = ab\cos(b\cdot 0) = ab$ en dus $ab = 3$.

b Als $f_{\max} = 5$ moet gelden $a = 5$ en $b = \frac{3}{5}$ of $a = -5$ en $b = -\frac{3}{5}$.

8.2 Product en quotiënt

bladzijde 154

9a Een product van twee factoren is nul als tenminste één van beide factoren nul is.
Dus $f(x) = \sin x\cdot\cos x = 0$ als $\sin x = 0$ of als $\cos x = 0$. Dus de nulpunten van *f* vallen samen met de nulpunten van zowel $\sin x$ en $\cos x$.

b De periode van de grafiek van *f* is π.

c De toppen van de grafieken van een sinus- of cosinusfunctie liggen op de lijnen $y = 1$ en $y = -1$.
De toppen van de grafiek van *f* liggen op de lijnen $y = \frac{1}{2}$ en $y = -\frac{1}{2}$.

d Als de sinus een uiterste waarde heeft, is de cosinus nul en andersom. De maxima van $f(x) = \sin x\cos x$ zullen dus tussen de maxima van de sinus- en cosinusfunctie liggen.
Om de waarde van de extremen te berekenen: $f'(x) = 0$ oplossen.
$f'(x) = \cos x\cos x - \sin x\sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$
$\cos^2 x - \sin^2 x = 0$ levert $\cos^2 x = \sin^2 x$ en dus $\cos x = \sin x$ of $\cos x = -\sin x$.
Hieruit volgt $x = 1\frac{1}{4}\pi$, $x = 1\frac{3}{4}\pi$, $x = 2\frac{1}{4}\pi$ en $x = 2\frac{3}{4}\pi$.
Invullen geeft de extremen $f(1\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}$, $f(1\frac{3}{4}\pi) = -\frac{1}{2}$, $f(2\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}$ en $f(2\frac{3}{4}\pi) = -\frac{1}{2}$

e $f(x) = a\sin bx = \frac{1}{2}\sin 2x$

10a $h(x) = f(x) \cdot g(x) = \sin(x+0,5) \cdot \cos x$
$h(x) = 0$ oplossen geeft $\sin(x+0,5) \cdot \cos(x) = 0$ en dus $\sin(x+0,5) = 0$ of $\cos x = 0$.
Hieruit volgt $x + 0,5 = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi$, enz. of $x = \frac{1}{2}?,\ 1\frac{1}{2}?,\ 2\frac{1}{2}?,\ 3\frac{1}{2}?$ enz. en dus
$x = -0,5;\ \pi - 0,5;\ 2\pi - 0,5;\ 3\pi - 0,5$ enz. of $x = \frac{1}{2}\pi,\ 1\frac{1}{2}\pi,\ 2\frac{1}{2}\pi,\ 3\frac{1}{2}\pi$ enz.

b De x-coördinaten van de toppen bevinden zich precies tussen de x-coördinaten van de nulpunten en zijn dus $x \approx 0,535$, $x \approx 2,106$, $x \approx 3,677$, $x \approx 5,248$ enz.

c *f* en *g* hebben beide een maximum van 1. Dit betekent dat het maximum van $h = f \cdot g$ 1 kan zijn, mits *f* en *g* voor dezelfde x-waarden maximaal zijn. Dit is niet het geval dus het maximum van *h* is kleiner dan 1.

d De periode van *h* is π.

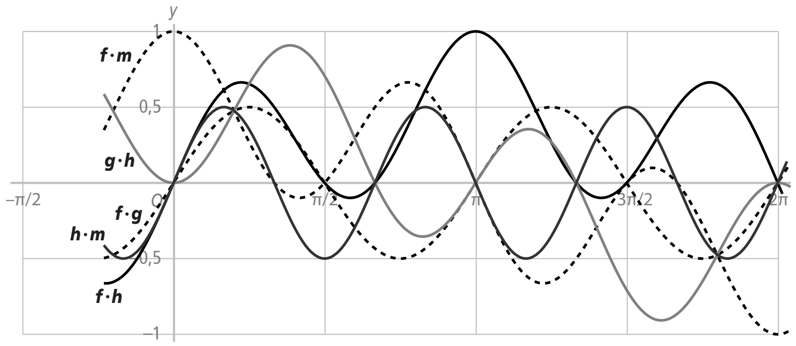
e $h(x) = d + a \sin b(x - c) \approx 0,24 + \frac{1}{2} \sin 2(x + \frac{1}{4})$

f Het gevonden functievoorschrift past inderdaad bij $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

11a Van *f* en *g* is de periode π, van *h* en *m* is de periode $\frac{2}{3}\pi$.

b De grafiek van *m* is ontstaan uit die van *h* door een verschuiving $\frac{1}{6}\pi$ naar links.

c

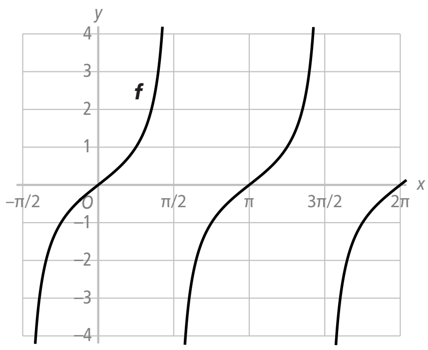


$f \cdot g$ en $h \cdot m$ zijn sinusoïden, $f \cdot h$, $f \cdot m$ en $g \cdot h$ zijn dat niet.

d $f \cdot g$ en $h \cdot m$ hebben beide amplitude $\frac{1}{2}$.

bladzijde 155

12a



De functie *f* is een quotiëntfunctie. Voor een quotiënt geldt dat je niet kunt delen door nul. De grafiek van *f* heeft verticale asymptoten, omdat de noemer van *f* voor verschillende x-waarden gelijk aan nul is.

b De periode van *f* is π.

c $\cos x = 0$ oplossen levert verschillende verticale asymptoten, namelijk $x = \frac{1}{2}\pi,\ 1\frac{1}{2}\pi,\ 2\frac{1}{2}\pi$ enz.

d $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \dfrac{BC}{AC}\cdot\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{BC}{AB} = \tan\alpha$

13a Met de rekenmachine: $Y1 = \tan(x)$ en $Y2 = 2$. De optie Calc $\rightarrow$ Intersect levert $x \approx -8{,}32$.

b $x \approx -8{,}32$ en $x \approx -5{,}18$.

c $f(x) < 2$ op de intervallen $\langle -3\pi, -8{,}32\rangle$, $\langle -2\frac{1}{2}\pi, -5{,}18\rangle$ en $\langle -1\frac{1}{2}\pi, -\pi\rangle$.

14a $f'(x) = \dfrac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \dfrac{(\cos x)^2}{(\cos x)^2} + \dfrac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2} = 1 + \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = 1 + (\tan x)^2$

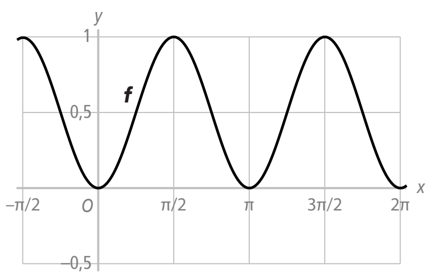
b $f(x) = \tan x = 0$ als $\sin x = 0$ en dus als $x = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi$ enz.
$f'(0) = 1 + (\tan 0)^2 = 1$, $f'(\pi) = 1$, $f'(2\pi) = 1$ enz.

c f daalt nergens als overal geldt $f'(x) > 0$.
$f'(x) = 1 + (\tan x)^2$, $f'(x)$ is een positief getal plus een kwadraat. Een kwadraat is altijd positief, dus het geheel blijft positief. Conclusie: de grafiek van *f* daalt nergens.

8.3 Kwadraten

bladzijde 156

15a



b *f* is een kwadratische functie van $\sin x$.
Een kwadraat is altijd positief of 0 en dus heeft *f* geen negatieve functiewaarden.

c $f(x) = d + a\sin b(x - c) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin 2(x - \frac{1}{4}\pi)$

d $g(x) = d + a\cos b(x - c) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$

16a $s'(x) = 2\sin x \cdot \cos x + 2\cos x \cdot -\sin x = 2\sin x\cos x - 2\sin x\cos x = 0$

b De helling van de grafiek van *s* is overal 0, dit betekent dat de grafiek van *s* een horizontale lijn is, dus is *s* een constante functie.

c Hoeken van $0°$ tot en met $90°$ komen in radialen overeen met $[0, \frac{1}{2}\pi]$.
De functie *s* heeft de hele getallenlijn als domein en dus ook het interval $[\frac{1}{2}\pi, 2\pi]$.
Conclusie: ook voor hoeken groter dan $90°$ geldt $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

17a $g(x) = 4(\sin^2 x + \cos^2 x) = 4 \cdot 1 = 4$, dus de grafiek van *g* valt samen met de lijn $y = 4$.
Stel $3x = t$ dan is $\sin^2 3x + \cos^2 3x = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$ en dus is $h(x) = 1$ en valt de grafiek van h valt samen met de lijn $y = 1$.
De grafiek van *j* valt niet samen met een lijn, want $\sin 3x$ en $\cos 4x$ hebben een verschillend argument.
$k(x) = 3(\sin^2 2\pi x + \cos^2 2\pi x) = 3 \cdot 1 = 3$, dus de grafiek van *k* valt samen met de lijn $y = 3$.

b $m(x) = (1 + \cos x)(1 - \cos x) = 1 - \cos x + \cos x - \cos^2 x = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x = n(x)$

bladzijde 157

18a De grafiek van v heeft amplitude 1, periode π en evenwichtsstand $y = 0$.

b $v(x) = a\cos bx = -\cos 2x$

c $v'(x) = --\sin(2x)\cdot 2 = 2\sin 2x$

d De grafiek van v' is een sinusoïde met amplitude 2, dus $v'_{\text{max}} = 2$ dat wil zeggen: de maximale waarde van de helling van de grafiek van v is 2.

19a $f(x) = 2\cos x \cdot \cos x$

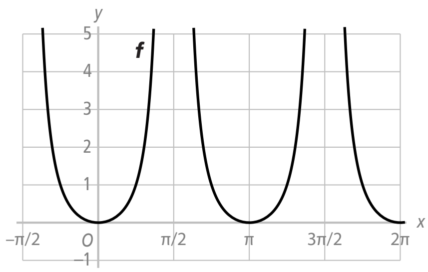
b f is het product van twee sinusoïden met dezelfde periode en evenwichtsstand $y = 0$ en dus zelf ook weer een sinusoïde.

c $f(x) = d + a\cos bx = 1 + \cos 2x$

d $f(x) = d + a\sin b(x - c) = 1 + \sin 2(x - \frac{3}{4}\pi)$

e $s(x) = f(x) + g(x) = 2\cos^2 x + 3\sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x + \sin^2 x + \sin^2 x = 2 + \sin^2 x$

20a



De functie f is een quotiënt en je kunt niet delen door nul.
De grafiek van f heeft daarom verticale asymptoten, omdat de noemer van f voor verschillende x-waarden gelijk aan nul is.

b De grafiek van f heeft periode π.

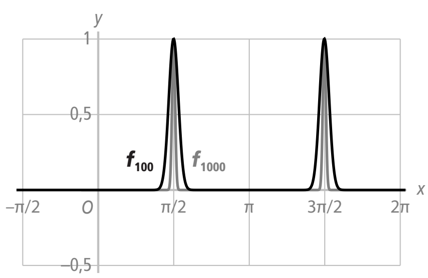
c $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = (\tan x)^2 = \tan^2 x$

d $f'(x) = \dfrac{\cos^2 x \cdot 2\sin x \cdot \cos x - \sin^2 x \cdot 2\cos x \cdot -\sin x}{\cos^4 x} = \dfrac{2\sin x\cos^3 x + 2\cos x\sin^3 x}{\cos^4 x}$

$= \dfrac{2\sin x\cos^3 x}{\cos^4 x} + \dfrac{2\cos x\sin^3 x}{\cos^4 x} = \dfrac{2\sin x}{\cos x} + \dfrac{2\sin^3 x}{\cos^3 x} = 2\tan x + 2\tan^3 x$

21a Hoe groter a, hoe ‘smaller’ de grafiek. Dus bij $a = 2$ hoort de bovenste grafiek, bij $a = 4$ die daaronder, bij $a = 6$ die daaronder en bij $a = 8$ de onderste grafiek.

b



c Het bereik van f voor even waarden van a is het interval $[0, 1]$.

d Het bereik van f voor oneven waarden van a is het interval $[-1, 1]$.

8.4 Sinusoïden optellen

bladzijde 158

22a De periode van r is $\frac{2\pi}{5\pi} = 0,4$ en de periode van b is ook $\frac{2\pi}{5\pi} = 0,4$, dus de periode van $B(t) = b(t) + r(t)$ is ook 0,4.

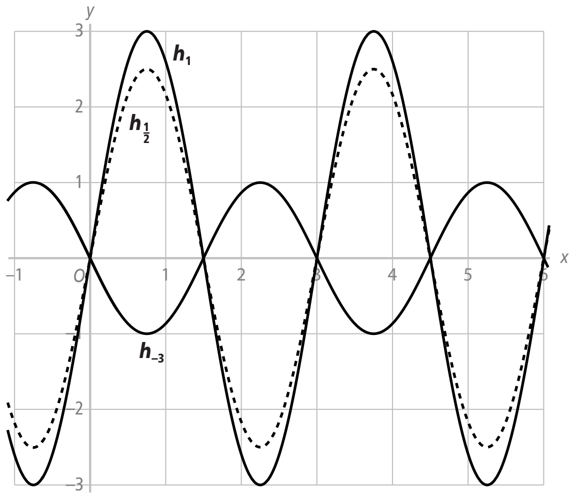
b $B(t) = a\sin b(t-c) = 6\sin 5\ \ (t+0,0656)$

c $B'(t) = 6\cos 5\pi(x+0,0656)\cdot 5\pi = 30\pi\cos 5\pi(x+0,0656)$

d De grafiek van B' heeft amplitude 30π, dus de maximale snelheid van de samengestelde beweging is 30π cm/s.

23a De twee sinussen waaruit h samengesteld hebben beide periode $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}\pi} = 3$, dus h heeft ook periode 3.

b

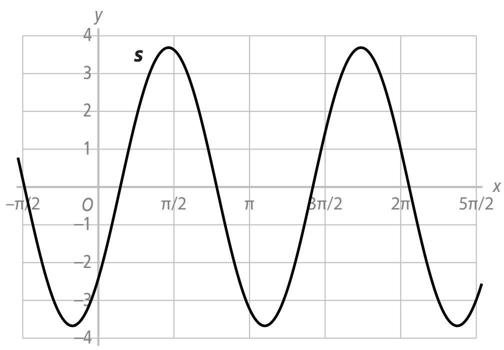


Voor $a = 1$ heeft de grafiek van h amplitude 3.
Voor $a = -3$ heeft de grafiek van h amplitude 1.
Voor $a = \frac{1}{2}$ heeft de grafiek van h amplitude $2\frac{1}{2}$.

c Als $a \geq -2$ is dan is de amplitude is $a+2$.
Als $a < -2$ dan is de amplitude $-(a+2) = -a-2$.

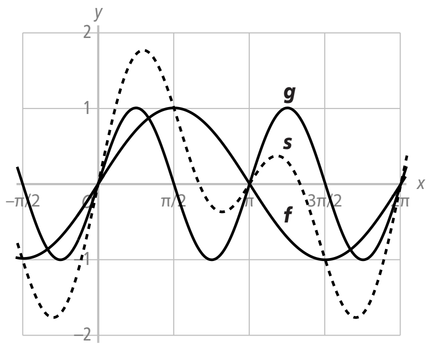
bladzijde 159

24



$s(x) = a\sin b(x-c) \approx 3,68\sin \frac{1}{2}\pi(x-0,46)$

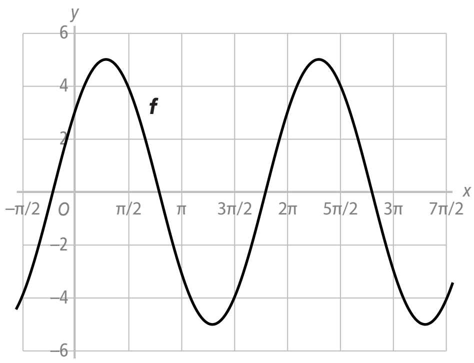
25



De grafiek van de functie s is wel periodiek maar geen sinusoïde.

26a De grafiek van f is een sinusoïde omdat de grafiek zich gedraagt als een sinus: de grafiek heeft een periode, een amplitude en een evenwichtsstand. Het is de som van twee sinusoïden met dezelfde periode.

b



$f(x) = a\cos(x - c) \approx 5\cos(x - 0{,}93)$

c $a = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ en $c = \tan^{-1}\frac{4}{3} \approx 0{,}927$

d $g(x) = 5\sin x + 12\cos x = a\cos(x - c)$ met $a = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$ en $\tan c = \frac{5}{12}$ en dus $c = \tan^{-1}\frac{5}{12} \approx 0{,}39$. Samen geeft dit $g(x) \approx 13\cos(x - 0{,}39)$

27a $B(t) = 3\sin 5\pi t + 5\sin 5\pi(t + 0{,}1) = 3\sin 5\pi t + 5\sin(5\pi t + 0{,}5\pi) = 3\sin 5\pi t + 5\cos 5\pi t$, want er geldt $\sin(t + 0{,}5\pi) = \cos t$.

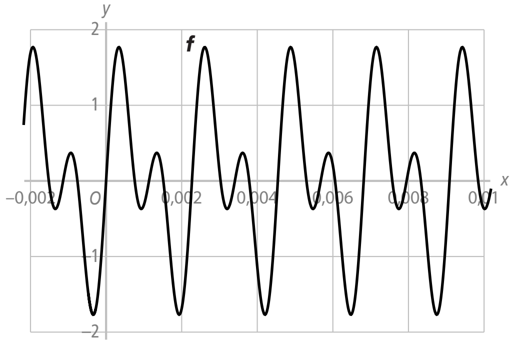
b $B(t) = a\cos(bt - c)$ met $a = \sqrt{5^2 + 3^2} \approx 5{,}83$, $b = 5\pi$ en $\tan c = \frac{3}{5}$
Dus $c = \tan^{-1}\frac{3}{5} \approx 0{,}54$. Samen geeft dit $B(t) \approx 5{,}83\cos(5\pi t - 0{,}54)$.

8.5 Zweving

bladzijde 160

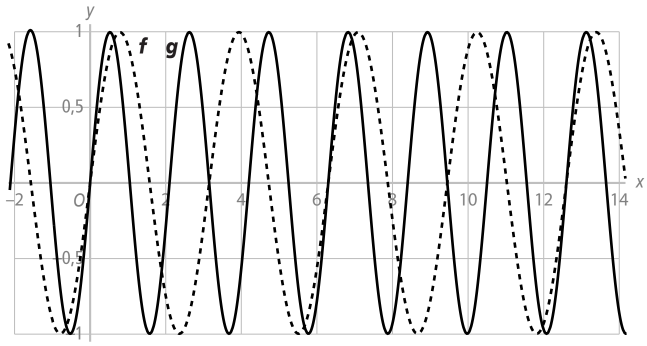
28a De standaardtoon a heeft frequentie 440 Hz, dat wil zeggen per seconde zijn er 440 trillingen.
De periode die hierbij hoort is $\frac{1}{440}$ en dit levert de functie $f_1(t) = \sin bt$ met $b = \frac{2\pi}{\frac{1}{440}} = 880\pi$ en dus $f_1(t) = \sin 880\pi t$. De eerste boventoon van de a heeft frequentie 880Hz. De periode die hierbij hoort is $\frac{1}{880}$ en dit levert de functie $f_2(t) = \sin 1760\pi t$. Het samenklinken van de a en de eerste boventoon levert dus de functie $f(t) = f_1(t) + f_2(t) = \sin 880\ \ t + \sin 1760\pi t$.

b



c De periode van de eerste sinus is $\frac{1}{440}$ en de periode van de tweede sinus is $\frac{1}{880}$.
De 'gemeenschappelijke' periode is $\frac{1}{440}$.

29a



Op $t = 2\pi$ beginnen beide grafieken tegelijk aan een nieuwe golf. De 'gemeenschappelijke' periode van *f* en *g* is dus 2π.

b De periode van *h* is 2π.

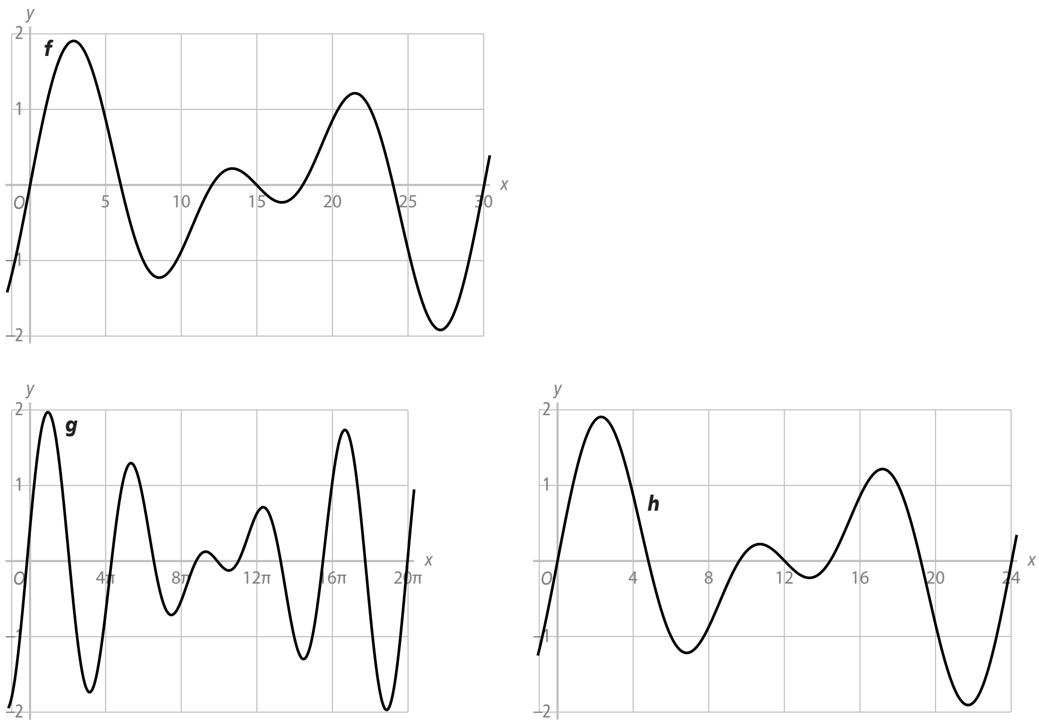
c *f* heeft periode π en g heeft periode $\frac{2}{3}\pi$. Dus is de gemeenschappelijke periode 2π.

bladzijde 161

30 De periode van *f*: $p = \dfrac{2\pi}{b} = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{3}\pi} = 6$. De periode van *g*: $p = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{4}\pi} = 8$.
Dus de periode van *h* is 24.

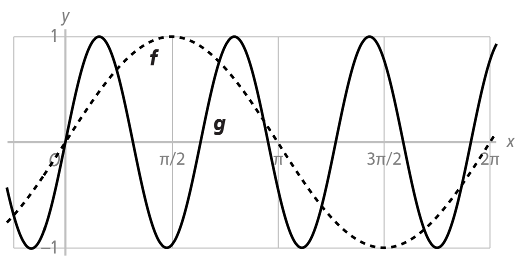
31a De periode van f_1: $p = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{5}\pi} = 10$. De periode van f_2: $p = \dfrac{2\pi}{\frac{2}{15}\pi} = 15$.
Dus de periode van f is 30.
De periode van g_1: $p = \dfrac{2\pi}{0,5} = 4\pi$. De periode van g_2: $p = \dfrac{2\pi}{0,4} = 5\pi$.
Dus de periode van g is 20π.
De periode van h_1: $p = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{4}\pi} = 8$. De periode van h_2: $p = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{6}\pi} = 12$.
Dus de periode van h is 24.

b



32a De periode van f is 2π en de periode van g is $\frac{2\pi}{\pi} = 2$.

b



f en g hebben geen 'gemeenschappelijke' periode.

c 2π en 2 hebben geen gemeenschappelijk veelvoud, dat wil zeggen f en g > hebben geen 'gemeenschappelijke' periode en dus is de zweving van $s(x) = f(x) + g(x)$ niet periodiek.

33a De toon met frequentie 60 Hz heeft periode $\frac{1}{60}$ en dit levert de functie $f_1(t) = \sin bt$ met $b = \frac{2\pi}{\frac{1}{60}} = 120\pi$ en dus $f_1(t) = \sin 160\pi t$. De andere toon heeft een frequentie van 55 Hz. De periode die hierbij hoort is $\frac{1}{55}$ en dit levert de functie $f_2(t) = \sin 110\pi t$. Het samenklinken van beide tonen levert dus de functie $f(t) = f_1(t) + f_2(t) = \sin 120\pi t + \sin 110\pi t$.

b Het kleinste gemene veelvoud van $\frac{1}{60}$ en $\frac{1}{55}$ is $\frac{1}{5}$, dus de periode van de zweving is $\frac{1}{5}$.

8.6 Gemengde opdrachten

bladzijde 162

34a Grafiek 1 hoort bij $c = 0{,}2$.

b Als de waarde van c dichter bij 0 komt, wordt de amplitude van de grafiek van s groter. De grafiek nadert de grafiek van $k(x) = 2\sin 2\pi x$.

c Voor $c = 0{,}5 + k$ met k een geheel getal is de grafiek van s geen sinusoïde. Je krijgt dan $s(x) = 0$ omdat dan $f(x) = -g(x)$ voor elke x.

d Dat is het geval als $2\pi c = \pi + k \cdot 2\pi$ (k geheel getal) en dus als $c = 0{,}5 + k$.

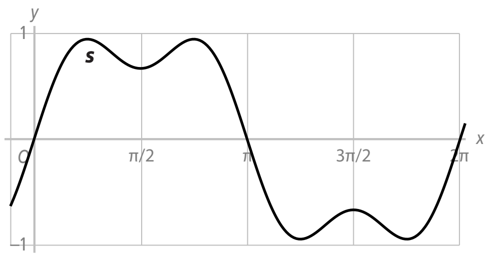
e $s(x) = a\sin b(x - c) = 1{,}62\sin 2\pi(x - 0{,}1)$

f De toppen van f moeten dan samenvallen met die van g , dus voor $c = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots$.

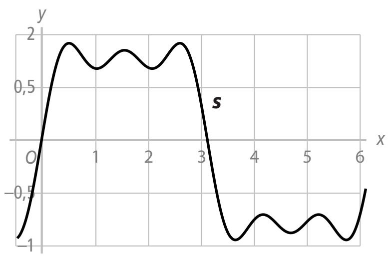
35a De somgrafiek van deze twee functies is wel periodiek maar geen sinusoïde, omdat f en f_2 niet dezelfde periode hebben.

b De periode van de somgrafiek is 2π .

c



d



e $s(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \frac{1}{9}\sin 9x + \ldots\ldots$
Je krijgt dan een benadering van de blokgrafiek waarvan de amplitude nog wat te klein is.
Beter wordt het met $y = \frac{4}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \frac{1}{9}\sin 9x + \ldots\ldots)$.
De hiervoor benodigde wiskunde komt op het HBO of WO onder de naam Fourieranalyse aan de orde.

bladzijde 163

36a $f(x) = \sqrt{\sin x} = (\sin x)^{\frac{1}{2}}$ en dus $f'(x) = \frac{1}{2}(\sin x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos x = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

b $y = ax + b$ met $a = f'(\frac{1}{6}\pi) = \dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{4}\sqrt{6}$. Invullen van ($\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$) in $y = \frac{1}{4}x\sqrt{6} + b$

geeft $\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}\pi \cdot \sqrt{6} + b$ en dus $b = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{24}\pi \cdot \sqrt{6}$.
Dus exact geldt als vergelijking $y = \frac{1}{4}x\sqrt{6} + \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{24}\pi \cdot \sqrt{6}$.
Als benadering geldt $y \approx 0{,}61x + 0{,}39$.

c Het domein van f is het interval $[0, \pi]$. De afgeleide van f bestaat niet als $\sin x = 0$, dit is het geval voor $x = 0$ en $x = \pi$.

d De grafiek van f heeft voor deze waarden van x > een randpunt met een verticale raaklijn.

37a Op de grond geldt $y = 0$. Dus $-5t^2 + 50t \sin \frac{1}{3}\pi = 0$, dit geeft $t(-5t + 50 \sin \frac{1}{3}\pi) = 0$, waaruit volgt $t = 0$ of $-5t + 50 \sin \frac{1}{3}\pi = 0$. Deze laatste vergelijking levert

$-5t = -50 \sin \frac{1}{3}\pi$ en dus $t = \dfrac{-50 \sin \frac{1}{3}\pi}{-5} = 10 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ seconden.

Deze waarde voor t invullen levert $x = 50 \cdot 5\sqrt{3} \cos \frac{1}{3}\pi = 250\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 125\sqrt{3}$ meter.
Conclusie: na $5\sqrt{3}$ seconden heeft het voorwerp $125\sqrt{3}$ meter in horizontale richting afgelegd.

b Op de grond geldt $y = 0$. Dus $-5t^2 + 50t \sin \alpha = 0$, dit geeft $t(-5t + 50 \sin \alpha) = 0$, waaruit volgt $t = 0$ of $-5t + 50 \sin \alpha = 0$. Deze laatste vergelijking levert

$-5t = -50 \sin \alpha$ en dus $t = \dfrac{-50 \sin \alpha}{-5} = 10 \sin \alpha$. Conclusie: de tijd die verloopt tussen het wegschieten van het voorwerp en het weerkomen is $t = 10 \sin \alpha$ seconden.

c $s = x = 50 \cdot 10 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 500 \sin \alpha \cos \alpha$

d $s'(\alpha) = 0$ oplossen
$s' = 500 \cos \alpha \cdot \cos \alpha + 500 \sin \alpha \cdot -\sin \alpha = 500 \cos^2 \alpha - 500 \sin^2 \alpha = 500(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$
$500(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0$ geeft $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 0$ en dus $\cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$.
Hieruit volgt $\cos \alpha = \sin \alpha$ of $\cos \alpha = -\sin \alpha$, waaruit volgt $\alpha = \frac{1}{4}\pi$. (Immers $0 \le \alpha \le \frac{1}{2}\pi$)
Dit geeft $s_{max} = 50 \cdot 10 \sin(\frac{1}{4}\pi) \cdot \cos(\frac{1}{4}\pi) = 500 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = 250$ meter.

Test jezelf

bladzijde 166

T-1a De grafiek van R heeft amplitude 4, periode $\frac{2}{3}\pi$ en evenwichtsstand $y = 1$.

b $R'(t) = -4 \sin 3t \cdot 3 = -12 \sin 3t$
De grafiek van R' heeft amplitude 12 en evenwichtsstand $y = 0$, hieruit volgt $R'_{max} = 12$.

T-2a p is een product van twee sinusoïden met dezelfde periode en evenwichtsstand $y = 0$ en is dus zelf ook weer een sinusoïde.

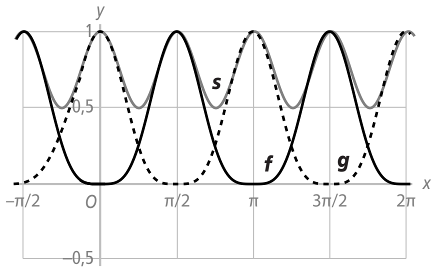
b $p(x) = 0$ als $f(x) = 0$ of $g(x) = 0$
$\sin 2x = 0$ als $2x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, ...$. Hieruit volgt $x = 0, \pm\frac{1}{2}\pi, \pm\pi, ...$.
$\sin(2x + \frac{1}{3}\pi) = 0$ als $2x + \frac{1}{3}\pi = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, ...$ Hieruit volgt
$2x = ..., -\frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, 1\frac{2}{3}\pi, ...$ en dus $x = ..., -\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi, ...$.

c De x-coördinaten van de toppen van p liggen precies tussen de x-coördinaten van de nulpunten van p. De x-coördinaten van de toppen van p zijn $x = ..., \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{12}\pi, \frac{8}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi, ...$ De y-coördinaten van de toppen zijn om en om $y = \frac{3}{4}$ en $y = -\frac{1}{4}$.

d Kijk bijvoorbeeld naar de x-coördinaten van twee opeenvolgende maxima. De periode van p is $\frac{1}{2}\pi$.

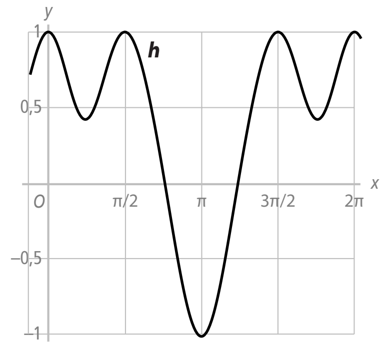
e $p(x) = d + a \sin b(x - c) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sin 4(x - \frac{1}{24}\pi)$

T-3a

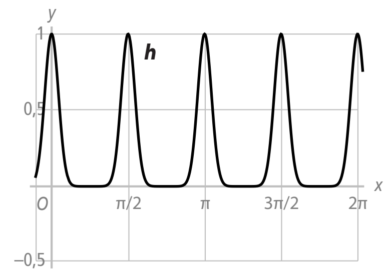


De grafiek van *s* gaat door de toppen van de grafieken van *f* en *g* omdat als *f* een top heeft, heeft *g* een nulpunt en omgekeerd.

b $h(x) = f(x) + g(x)$, hierbij heeft $f(x)$ alleen positieve waarden, terwijl de waarden $g(x)$ zowel positief als negatief zijn.
Samen levert dit voor $h(x)$ een aantal negatieve waarden.



c Omdat $-1 \leq \sin x \leq 1$ en $-1 \leq \cos x \leq 1$ nadert $h(x) = (\sin x)^a + (\cos x)^a$ naar 0 voor die waarden van *x* waarvoor $\sin x \neq \pm 1$ en $\cos x \neq \pm 1$.



bladzijde 167

T-4a De periode van f is $\frac{2\pi}{3}$ > en de periode van g is ook $\frac{2\pi}{3}$, dus de grafiek van s is ook een sinusoïde.

b De somgrafiek heeft dezelfde periode als de samenstellende sinusoïden, dus de periode van s is $\frac{2}{3}\pi$.

c $s(x) = a \sin b(x - c) \approx 6{,}16 \sin 3(x + 0{,}19)$

T-5a De periode van z is 18.

b De periode van f is $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}\pi} = 6$.

c Als *g* periode 3 heeft, dan heeft *z* periode 6 en dat klopt niet.
Als *g* periode 6 heeft, dan heeft *z* periode 6 en dat klopt niet.
Als *g* periode 12 heeft, dan heeft *z* periode 12 en ook dat klopt niet.
Dus de periode van g kan niet 3, 6 of 12 zijn.

d De periode van g is 9 of 18.

e $g(x) = a \sin \frac{2}{p}\pi x = 2 \sin \frac{2}{9}\pi x$

T-6a De periode van f is $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}\pi} = 4$ en de periode van g is $\frac{2\pi}{\frac{1}{5}\pi} = 10$.

Deze periodes zijn niet gelijk, dus de grafiek van s is geen sinusoïde.

b Het kleinste gemene veelvoud van 4 en 10 is 20, dus de periode van s is 20.

T-7a f is ongelijk aan g, want $g(x) = \frac{\frac{1}{10}\sin 2x}{\frac{1}{10}\cos 2x} = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \tan 2x \neq \frac{1}{10}\tan 2x = f(x)$.

b $f(x) = \frac{1}{10}\tan 2x = \frac{1}{10} \cdot \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\sin 2x}{10\cos 2x}$.

De grafiek van f heeft asymptoten als de noemer van $f(x)$ gelijk aan nul is.

$10\cos 2x = 0$ als $\cos 2x = 0$ en dus als $2x = \pm\frac{1}{2}\pi,\ \pm 1\frac{1}{2}\pi,\ \pm 2\frac{1}{2}\pi, ...$.

Dit geeft $x = \pm\frac{1}{4}\pi,\ \pm\frac{3}{4}\pi,\ \pm 1\frac{1}{4}\pi, ...$.

c $\frac{1}{10}\tan 2x = 1$ geeft $\tan 2x = 10$ en dus $2x = \tan^{-1}(10) \approx 1{,}47$. Dit geeft $x \approx 0{,}74$.

De periode van f is $\frac{1}{2}\pi$, dus op het interval $[0, \pi]$ levert de vergelijking twee oplossingen:

$x \approx 0{,}74$ en $x \approx 0{,}74 + \frac{1}{2}\pi \approx 2{,}31$.

d $\frac{1}{10}\tan 2x = 100$ geeft $\tan 2x = 1000$ en dus $2x = \tan^{-1} 1000 \approx 1{,}5698$ en dus $x \approx 0{,}7849$.

Dus is $f(x) > 100$ op het interval $\langle 0{,}7849; \frac{1}{4}\pi \rangle$.

T-8a Als je de eerste twee sinusoïden met dezelfde periode bij elkaar optelt, is de som hiervan ook een sinusoïde met dezelfde periode als de samenstellende sinusoïden. Als je deze sinusoïde en de derde sinusoïde, die beide dezelfde periode hebben, bij elkaar optelt heb je opnieuw een sinusoïde.

(Mits er niet een constante functie uitkomt zoals bij $f(x) = \sin x + 2\sin x - 3\sin x$)

b De periode van $f(x) = \sin x$ is 2π, terwijl $g(x) = \sin \pi x$ periode $\frac{2\pi}{\pi} = 2$ heeft.

Stel dat er een gemeenschappelijke zweving is. Dan moet er een gemeenschappelijk veelvoud zijn van 2π en 2. Dus moeten er dan twee gehele getallen *k* en *l* zijn waarvoor geldt $k \cdot 2\ \ = 2 \cdot l$. Uit dit laatste volgt $\pi = \frac{l}{k}$ en daarmee zou π een breuk zijn. En dat is niet waar. Dus kan er geen gemeenschappelijke periode zijn en is de zweving niet periodiek.